تمرين في الأقمار الإصطناعية

قرر مركز الأبحاث الفضائية إرسال بعثة من الرواد من أجل دراسة بيئية للغلاف الجوي للأرض .
دراسة بعض مراحل الرحلة .

الجزء الأول : مرحلة الإنطلاق

عند تشغيل المحرك يكون الانطلاق رأسيا ونقبل ان اندفاع الغازات المحترقة يكافئ قوة خارجية شدتها $F = 32{,}4.10^4\ N$ تسمى قوة الدفع . نهمل الاحتكاك ونعتبر شدة مجال الثقالة ثابتة عند سطح الارض قيمتها $g_0 = 9{,}81\ m.s^{-2}$ و كتلة المركبة عند الانطلاق $M = 2041\ .10^3\ kg$.

1-أجرد القوى المطبقة على المركبة الفضائية عند لحظة الانطلاق .

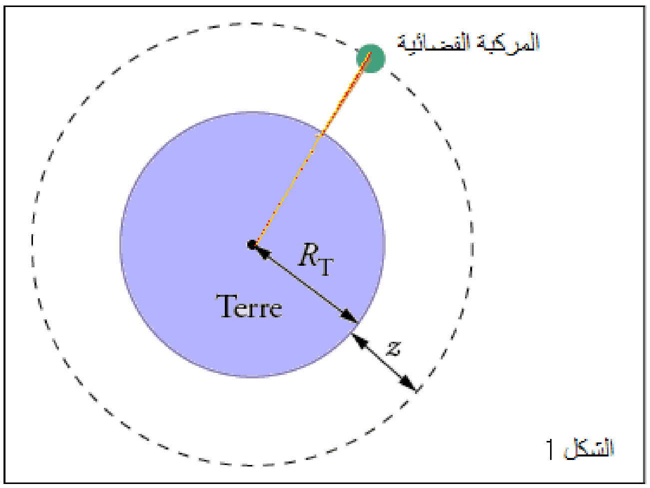
2-أحسب تسارع المركبة a_0 عند لحظة الانطلاق .

3-أحسب السرعة و الارتفاع التي تصل إليها المركبة عند التاريخ $t = 2{,}5\ mn$ إذا افترضنا ان التسارع ثابت .

4-في الحقيقة سرعة المركبة أكبر من السرعة التي تم حسابها سابقا . اعط تفسيرا لذلك.

الجزء الثاني : الحركة الدائرية حول الأرض

بعد $10\ mn$ من الانطلاق ، تدخل المركبة إلى مدارها الدائري حول الأرض على ارتفاع $z = 300\ km$ وتكون كتلتها $m = 69{,}68\ .10^3\ kg$. نعتبر المركبة نقطة مادية والأرض كروية الشكل شعاعها $R_T = 6400\ km$.



الشكل 1

1-مثل على الشكل 1 متجهة القوة $\vec{F}$ المطبقة على المركبة .

2-بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد تعبير تسارع المركبة بدلالة z ، R_T ، M_T كتلة الارض و G ثابتة التجاذب الكوني.

3-أعط تعبير سرعة المركبة بدلالة M_T ، G و $r = R_T + h$.

4-تحقق من القانون الثالث لكبلير .

5-علما ان سرعة المركبة هي $V = 7{,}74\ km.s^{-1}$ ، أحسب كتلة الأرض M_T .

نعطي : $G = 6{,}67.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

الجزء الثالث : مرحلة النزول

1-فتح المظلة

خلال مرحلة النزول تكون حركة المركبة رأسية . عند الإرتفاع z_1 تفتح المظلة المرتبطة بالمركبة فتخضع المجموعة إلى قوة احتكاك منحاها معاكس لمنحى السرعة و التي ننمذج شدتها ب $f = kV_z{}^2$ حيث V_Z سرعة المركبة على المحور Oz و k ثابتة .

نهمل داافعة ارخميدس ونختار المحور Oz موجه نحو الأعلى أصله O عند سطح الأرض .

1.1-أكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة V_z .

2.1-تصل سرعة المركبة إلى قمة حدية $V_{lim} = 10\ m.s^{-1}$. حدد وحدةالثابتة k ثم أحسب قيمتها .
نعتبر كتلة المركبة ثابتة وتساوي m .

2-انفلات جسم من المركبة

عندما تصل المركبة الى النقطة M_0 ذات الإحداثيتين $(x_0 = 0\ , z_0 = h = 3\ km)$ في معلم $(O\ ,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ )$ نعتبره غاليليا بسرعة $V_0 = V_{lim} = 10\ m.s^{-1}$ في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ ، ينفلت جسم (S) من المركبة بسرعة $V_0 = V$ تكون زاوية $\alpha = 11°$ مع الخط الراسي (أنظ الشكل 2) .

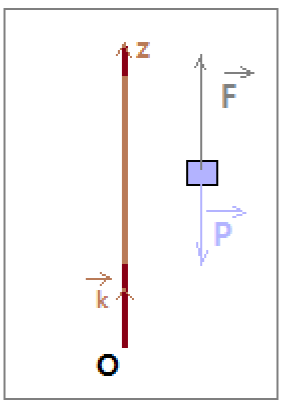
1.2-أكتب المعادلتية الزمنيتين لحركة الجسم (S) في المعلم $(O\ ,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ )$.
2.2-أكتب المعادلة الزمنية لحركة المركبة .
3.2-حدد أيهما يصل الأول إلى سطح الأرض المركبة أم الجسم (S) .
4.2-حدد المدة الزمنية الفاصلة بين وصول كل منهم إلى سطح الأرض .

الشكل 2

التصحيح :

الجزء الأول : مرحلة الإنطلاق

1-جرد القوى المطبقة على المركبة الفضائية عند لحظة الانطلاق



تخضع المركبة إلى :

قوة الدفع : $\vec{F}$

وزنها : $\vec{P}$

2-حساب تسارع المركبة $\boldsymbol{a_0}$ عند لحظة الانطلاق

حسب بالقانون الثاني لنيوتن : $\vec{F}+\vec{P}=m.\vec{a}$

نسقط العلاقة على المحور Oz الموجه نحو الاعلى : $F-P=ma_0$

$$a_0=\frac{F}{m}-\frac{m.g}{m}\Longrightarrow a_0=\frac{F}{m}-g\ \Longrightarrow a_0=\frac{32{,}4.10^3}{2041.10^3}-9{,}81\Longrightarrow \boldsymbol{a_0=6,06\ m.s^{-2}}$$

3-حساب السرعة و الارتفاع التي تصل إليها المركبة عند التاريخ $\boldsymbol{t=2,5\ mn}$

$$a_0=\frac{dV}{dt}\Longrightarrow V=a_0.t+V_0$$

لدينا عند $t=0$ سرعة المركبة منعدمة $V_0=0$ ومنه : $\boldsymbol{V=a_0.t}$ ت.ع : $\boldsymbol{V=6,06\times 2,5\times 60=909\ m.s^{-1}}$

المعادلة الزمنية تكتب : $z=\frac{1}{2}a_0.t^2+z_0$ لدينا عند $t=0$ أنسوب المركبة منعدم $z_0=0$ ومنه :

$$\boldsymbol{z=\frac{1}{2}\times 6,06\times 2,5\times 60=454,5\ m\ \ \Longleftarrow\ z=\frac{1}{2}a_0.t^2}$$

4-لماذا سرعة المركبة أكبر من التي تم حسابها ؟

تعبير شدة الثقالة عند الارتفاع z هو : $g = g_0.\frac{{R_T}^2}{(R_T+Z)^2}$ إذن كلما تزايد الارتفاع z تناقصت قيمة g وبالتالي قيمة التسارع a تتزايد حسب العلاقة : $a = \frac{F}{m} - g$ وبالتالي سرعة المركبة أكبر من القيمة التي تم حسابها .

الجزء الثاني : الحركة الدائرية حول الأرض

1-تمثيل ، على الشكل 1 ، $\vec{F}$ متجهة القوة المطبقة على المركبة من طرف الأرض

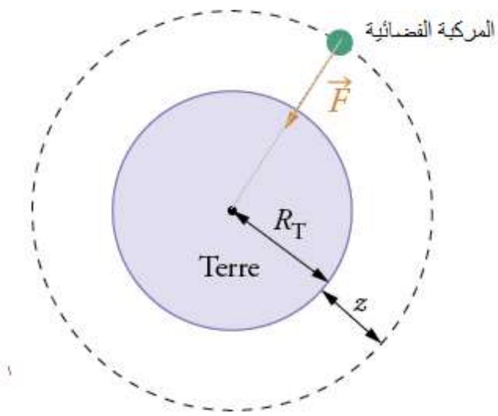
2-تعبير a تسارع المركبة

تخضع المركبة إلى قوة التجاذب الكوني التي تطبقها الارض تعبيرها :

$$\vec{F} = G\frac{m.M_T}{(R_T+h)^2}.\vec{n}$$

القانون الثاني لنيوتن يكتب : $\vec{F} = m.\vec{a}$ أي: $m.\vec{a} = G\frac{m.M_T}{(R_T+h)^2}.\vec{n}$ إذن : $\vec{a} = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}.\vec{n}$

تعبير التسارع هو : (1) $\quad a = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}$



3-تعبير V سرعة المركبة

في معلم فريني متجهة التسارع تكتب : $\vec{a} = a_T.\vec{u} + a_N.\vec{n}$

وبالتالي : $a_T = 0$ و (2) $\quad a = a_N = \frac{V^2}{R_T+z}$

من العلاقتين (1) و (2) نكتب : $\frac{V^2}{R_T+z} = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}$ وبالتالي :

$$V = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+z}} \qquad (3)$$

4-التحقق من القانون الثالث لكبلير

نعلم ان $V = (R_T+h).\omega$ أي: $V = (R_T+h).\frac{2\pi}{T}$ حسب العلاقة (3)

$$\sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+z}} = (R_T+h).\frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \frac{G.M_T}{R_T+z} = \frac{4\pi^2.(R_T+z)^2}{T^2}$$

$$\frac{T^2}{(R_T+z)^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T} = C^{te}$$

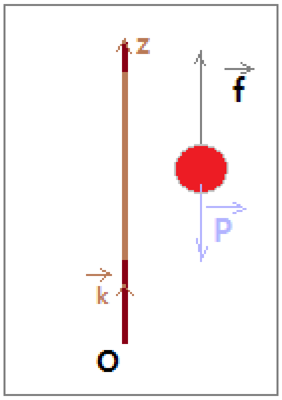
5-حساب M_T كتلة الأرض

العلاقة (3) تكتب : $V^2 = \frac{G.M_T}{R_T+z}$ إذن : $G.M_T = V^2.(R_T+z)$ أي: $M_T = \frac{V^2.(R_T+z)}{G}$

ت.ع : $M_T = \frac{(7{,}74\times10^3)^2\times(6400\times10^3+300\times10^3)}{6{,}67\times10^{-11}} \approx 6.10^{24}\ kg$

الجزء الثالث : مرحلة النزول

1-مرحلة فتح المظلة



1.1- كتابة المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة V_z

تخضع المظلة لقوة الاحتكاك $\vec{f}$ والوزن $\vec{P}$.

تطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P}+\vec{f}=m.\vec{a}$

الإسقاط على المحور Oz : $f-P=m.a$ أي: $kV_z{}^2-m.g=m.\frac{dV_z}{dt}$

$$\boldsymbol{\frac{dV_z}{dt}=\frac{k}{m}.V_z{}^2-g}$$

2.1- وحدة وقيمة الثابتة k

وحدة k هي : $[k]=\frac{kg\times m\times s^{-2}}{m^2\times s^{-2}}=kg.m^{-1}$

في النظام الدائم يكون $V_z=V_{lim}=C^{te}$ إذن : $\frac{dV_z}{dt}=0$ المعادلة التفاضلية تكتب :

$\frac{k}{m}.V_{lim}{}^2-g=0$ أي : $\boldsymbol{k=\frac{m.g}{V_{lim}{}^2}}$ ت.ع : $\boldsymbol{k=\frac{69,68\times10^3\times9,81}{100}=6835,6\approx6,8.10^3\ kg.m^{-1}}$

2-مرحلة انفلات جسم من المركبة

1.2- المعادلتية الزمنيتين لحركة الجسم $(\boldsymbol{S})$

نطبق القانون الثاني على الثاني لنيوتن على الجسم (S) في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

$\vec{P}=m.\vec{a}_G$ أي : $m.\vec{g}=m.\vec{a}_G$ وبالتالي : $\vec{a}_G=\vec{g}$

حسب الشروط البدئية أي عند لحظة الانفلات : $\begin{cases}x_0=0\\z_0=h\end{cases}$ و $\begin{cases}V_{0x}=V_0.sin\alpha\\V_{0z}=-V_0.cos\alpha\end{cases}$

الاسقاط على Ox : $a_x=0$ أي: $V_x=V_{0x}=V_0.sin\alpha$ ومنه : $x(t)=V_0.sin\alpha.t+x_0$

نحصل على : $\boldsymbol{x(t)=V_0.sin\alpha.t}$ ت.ع : $\boldsymbol{x(t)=7,74.10^3\sin(11°).t=1,48.10^3\ m}$

الاسقاط على Oz : $a_z=-g$ أي: $V_z=-g.t+V_{0z}=-g.t-V_0.cos\alpha$

ومنه : $z(t)=-\frac{1}{2}g.t^2-V_0.cos\alpha.t+z_0$ أي: $\boldsymbol{z(t)=-\frac{1}{2}g.t^2-V_0.cos\alpha.t+h}$

ت.ع : $z(t)=-4{,}9t^2-7{,}74.10^3\times\cos(11°).t+300\times10^3$ أي: $\boldsymbol{z(t)=-4,9.t^2-7,6.10^3.t+3.10^5}$

2.2-المعادلة الزمنية لحركة المركبة

بما ان سرعة المركبة ثابتة ، فإن حركتها مستقيمية منتظمة وتتم على المحور Oz أي: $x=0$ و $V_x=0$

حسب الشروط البدئية : $z_0=h$ و $V_{0z}=-V_{lim}$

المعادلة الزمنية تكتب : $\boldsymbol{z=-V_{lim}.t+h}$ ت.ع : $\boldsymbol{z=-10.t+3.10^5}$

3.2-لتكن $\boldsymbol{t_1}$ تاريخ وصول الجسم $(\boldsymbol{S})$ إلى سطح الأرض

عند سطح الأرض يكون $z = 0$ ومنه : $-\frac{1}{2}g.t^2 - V_0.cos\alpha.t + h = 0$

$\boldsymbol{4,9.t^2 + 7,6.10^3.t - 3.10^5 = 0}$ نجد : $\boldsymbol{t_1 = \frac{-7,6.10^3+\sqrt{(7,6.10^3)^2-4\times 4,9\times(-3.10^5)}}{2\times 4,9} = 1590\ s}$

لتكن t_2 تاريخ وصول المركبة إلى سطح الأرض :

عند سطح الأرض يكون $z = 0$ ومنه : $\boldsymbol{-10.t_2 + 3.10^5 = 0}$ وبالتالي : $\boldsymbol{t_2 = \frac{3.10^5}{10} = 3.10^4\ s}$

الجسم (S) يصل قبل المركبة إلى سطح الأرض .

4.2-حساب $\boldsymbol{\Delta t = t_2 - t_1}$

$$\boldsymbol{\Delta t = t_2 - t_1 = 3.10^4 - 1590 = 28410\ s \Longrightarrow \Delta t \approx 7,9\ h}$$