تصحيح فرض محروس رقم 2 الدورة 2 السنة الثانية علوم رياضية، 2015 / 2016

بقلم التلميذ : الحسين أوحيسين

الموضوع يتضمن : دراسة ضربة خطأ : دراسة حركة كرة القدم في مجال الثقالة بدون احتكاك وباحتكاك ، دراسة حركة كوكب حول الشمس ، تفضيض كرة معدنية بالتحليل الكهربائي

التمرين الأول : دراسة ضربة خطا : دراسة حركة كرة القدم في مجال الثقالة بدون احتكاك وباحتكاك

.05.2016

تصحيح الفرض المحروس رقم 2 - الأسدس الثاني -

التمرين الأول : دراسة ضربة خطأ

1- إثبات المعادلتين الزمنيتين للحركة بتطبيق القانون II لنيوتن :

حسب القانون الثاني لنيوتن لدينا $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$

$\Leftrightarrow m\vec{a} = m\vec{g} \Leftrightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$

نسقط العلاقة على المحورين

$$\begin{matrix} (Ox) \\ (Oz) \end{matrix} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

لدينا $\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} \\ a_z = \dfrac{dV_z}{dt} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dV_z}{dt} = -g \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} dV_x = 0 \\ dV_z = -g\,dt \end{cases}$$

بإجراء عملية التكامل لدينا $\int_{V_{0x}}^{V_x} dV_x = 0$ و $\int_{V_{0z}}^{V_z} dV_z = -g\int_0^t dt$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [V_x]_{V_{0x}}^{V_x} = 0 \\ [V_z]_{V_{0z}}^{V_z} = -g[t]_0^t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_x - V_{0x} = 0 \\ V_z - V_{0z} = -g(t-0) \end{cases}$$

ومنه $\begin{cases} V_x = V_{0x} \\ V_z = -gt + V_{0z} \end{cases}$

لدينا $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{-V_{0x}}{V_0} \\ \sin\alpha = \dfrac{V_{0z}}{V_0} \end{cases}$ إذن $V_{0x} = -V_0 \cos\alpha$ ، $V_{0z} = V_0 \cdot \sin\alpha$

ومنه

$$\boxed{V_x = -V_0 \cos\alpha}$$
$$\boxed{V_z = -gt + V_0 \sin\alpha}$$

نعلم أن $\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$ إذن

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -v_0 \cos\alpha \\ \dfrac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dX = -v_0 \cos\alpha \, dt \\ dz = (-gt + v_0 \sin\alpha)\, dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{x_0}^{x} dX = -v_0 \cos\alpha \int_0^t dt \\ \int_{z_0}^{z} dz = \int_0^t (-gt + v_0 \sin\alpha)\, dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [X]_{x_0}^{x} = -v_0 \cos\alpha \, [t]_0^t \\ [z]_{z_0}^{z} = -g\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^t + v_0 \sin\alpha \, [t]_0^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X - X_0 = -v_0 \cos\alpha \,(t - 0) \\ z - z_0 = -g\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}0^2\right) + v_0 \sin\alpha \,(t - 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = -v_0 \cos\alpha \cdot t + x_0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}g t^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t + z_0 \end{cases}$$

لدينا $x_0 = L$ و $z_0 = 0$

ومنه

$$\boxed{\begin{aligned} X(t) &= -v_0 \cos\alpha \cdot t + L \\ z(t) &= -\frac{1}{2}g t^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t \end{aligned}}$$

2- معادلة المسار : $z = f(x)$

لدينا $x(t) = -v_0 \cos\alpha \cdot t + L$ إذن $t = \dfrac{x - L}{-v_0 \cos\alpha}$

ومنه $\boxed{t = \dfrac{L - x}{v_0 \cos\alpha}}$

نعوض عن t في $z(t)$.

إذن $z(x) = -\frac{1}{2} g \left(\dfrac{L - x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \cdot \dfrac{(L - x)}{v_0 \cos\alpha}$

$$\Leftrightarrow \boxed{z(x) = \frac{-g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}(L - x)^2 + \tan\alpha \cdot (L - x)}$$

و نعلم أن $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$

إذن $z(x) = \dfrac{-g}{2 v_0^2}(1 + \tan^2\alpha)(L - x)^2 + \tan\alpha \cdot (L - x)$

ومنه
$$\boxed{z(x) = \frac{-g}{2v_0^2}(L-x)^2\tan^2\alpha + (L-x)\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2}(L-x)^2}$$

ملاحوظة

$$z(x) = A\tan^2\alpha + B\tan\alpha + C$$

بحيث
$$A = \frac{-g}{2v_0^2}(L-x)^2 \;/\; B = L-x \;/\; C = \frac{-g}{2v_0^2}(L-x)^2$$

3 - الشرط الذي يجب أن تحققه السرعة البدئية لتمر الكرة فوق

لكي تمر الكرة فوق الحائط يجب تحقق الشرط التالي

$$z(x = L-\ell) > h$$

$$\Leftrightarrow \frac{-g}{2v_0^2}\ell^2\tan^2\alpha + \ell\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2}\ell^2 - h > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{g\ell}\tan\alpha + 1 + \frac{2v_0^2 h}{g\ell^2} < 0} \quad \text{I} \quad \left(-\frac{g}{2v_0^2}\ell^2 \ldots\right.$$

لنحل المتراجحة I

$$\tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{g\ell}\tan\alpha + 1 + \frac{2v_0^2 h}{g\ell^2} = 0$$

لنحسب المميز المختصر لهذه المعادلة.

$$\boxed{\Delta = \left(-\frac{v_0^2}{g\ell}\right)^2 - \left(1 + \frac{2v_0^2 h}{g\ell^2}\right) > 0} \quad \text{II}$$

طريقة 1: نضرب المتراجحة II في ℓ^2

إذن

$$\frac{v_0^4}{g^2} - \left(\ell^2 + \frac{2v_0^2 h}{g}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0^4}{g^2} - 2\cdot\frac{v_0^2}{g}\times h + h^2 - h^2 - \ell^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{v_0^2}{g} - h\right)^2 > h^2 + \ell^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0^2}{g} - h > \sqrt{h^2+\ell^2} \Leftrightarrow \frac{v_0^2}{g} > h + \sqrt{h^2+\ell^2}$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 > g\left(h + \sqrt{h^2+\ell^2}\right)$$

ومنه
$$\boxed{v_0 > \sqrt{g\left(h + \sqrt{h^2+\ell^2}\right)}}$$

طريقة 2

لدينا $\Delta = \frac{1}{g^2 l^2}\left(V_0^4 - 2V_0^2 g h - g^2 l^2\right) > 0$

نحل المتراجحة $V_0^4 - 2V_0^2 g h - g^2 l^2$

نستنتج إذا أن $\boxed{V_0 > \sqrt{g\left(h + \sqrt{h^2 + l^2}\right)}}$

لنبين أن الزاوية α محصورة بين قيمتين يجب تحديدهما

بدلالة l و g و V_0 و h :

لدينا $\tan^2\alpha - \frac{2V_0^2}{gl}\tan\alpha + 1 + \frac{2V_0^2 h}{gl} < 0$ (I)

بما أن $\Delta > 0$ إذن المعادلة $\tan^2\alpha - \frac{2V_0^2}{gl}\tan\alpha + 1 + \frac{2V_0^2 h}{gl} = 0$

تقبل حلين $\tan(\alpha_1)$ و $\tan(\alpha_2)$

$$\begin{cases} \tan(\alpha_1) = \frac{V_0^2}{gl} - \sqrt{\Delta} \\ \tan(\alpha_2) = \frac{V_0^2}{gl} + \sqrt{\Delta} \end{cases}$$

ومنه

$$\boxed{\tan(\alpha_1) = \frac{V_0^2}{gl} - \frac{1}{gl}\sqrt{V_0^4 - 2V_0^2 g h - g^2 l^2} > 0}$$

$$\boxed{\tan(\alpha_2) = \frac{V_0^2}{gl} + \frac{1}{gl}\sqrt{V_0^4 - 2V_0^2 g h - g^2 l^2} > 0}$$

$\tan\alpha$	$-\infty$		$\tan(\alpha_1)$		$\tan(\alpha_2)$		$+\infty$
إشارة (I)		+	0	−	0	+	

ومنه $\boxed{\tan(\alpha_1) < \tan\alpha < \tan(\alpha_2)}$

إذن

$$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$$

$$\arctan\left(\frac{V_0^2}{gl} - \frac{1}{gl}\sqrt{V_0^4 - 2V_0^2 g h - g^2 l^2}\right) < \alpha < \arctan\left(\frac{V_0^2}{gl} + \frac{1}{gl}\sqrt{V_0^4 - 2V_0^2 g h - g^2 l^2}\right)$$

5- لنحدد القيمة الدنيا ل v_0 لتجتاز الكرة الحائط علما أن α ثابتة و تحقق: $\tan\alpha > \frac{h}{\ell}$

لدينا $z(x) = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}(L-x)^2 + (L-x)\tan\alpha$

عند $x = L-\ell$: $z(x = L-\ell) \geqslant h$

$$\Leftrightarrow \frac{-g\ell^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + \ell\cdot\tan\alpha \geqslant h$$

$$\Leftrightarrow \frac{g\ell^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \leqslant \ell\cdot\tan(\alpha) - h$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 \geqslant \frac{g\ell^2}{2\cos^2\alpha(\ell\cdot\tan\alpha - h)}$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 \geqslant \frac{g^2\ell^2}{\cos^2\alpha}\left(\frac{1}{2g[\ell\tan\alpha - h]}\right)$$

$$\Leftrightarrow v_0 \geqslant \frac{g\ell}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{2g[\ell\tan\alpha - h]}}$$

بحيث $\ell\tan\alpha - h > 0 \Leftarrow \tan\alpha > \frac{h}{\ell}$

ومنه السرعة البدئية الدنيا هي: $\boxed{v_{0\,min} = \frac{g\ell}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{2g(\ell\tan\alpha - h)}}}$

6- شرط تسجيل الهدف:

ليتم تسجيل الهدف يجب أن يتحقق الشرط $z(x=0) < H$

وبنفس الطريقة السابقة (السؤال 3) $(\Delta > 0)$

نجد أن $v_0 > \sqrt{g\left[H + \sqrt{H^2 + L^2}\right]}$

7- الشرط الذي يجب أن تحققه الزاوية α:

لدينا $z(x=0) < H$

إذن $\frac{-g}{2v_0^2}L^2\tan^2\alpha + L\cdot\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2}L^2 - H < 0$

$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{gL}\cdot\tan\alpha + 1 + \frac{2v_0^2 H}{gL^2} > 0$$

لدينا $\tan(\alpha'_1) = \frac{v_0^2}{gL} - \sqrt{\Delta}$ و $\tan(\alpha'_2) = \frac{v_0^2}{gL} + \sqrt{\Delta}$

$$\tan(\alpha_1') = \frac{V_0^2}{gL} - \frac{1}{gL}\sqrt{V_0^4 - 2V_0^2 gH - g^2L^2}$$

$$\tan(\alpha_2') = \frac{V_0^2}{gL} + \frac{1}{gL}\sqrt{V_0^4 - 2V_0^2 gH - g^2L^2}$$

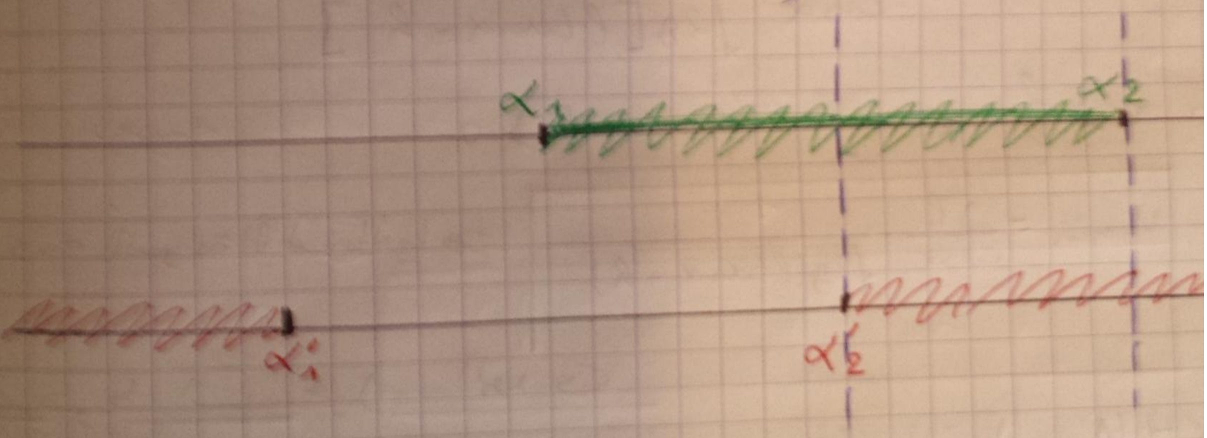
$\tan\alpha$	$-\infty$		$\tan(\alpha_1')$		$\tan(\alpha_2')$		$+\infty$
[illegible]		+	0	−	0	+	

$$\tan\alpha \in]-\infty, \tan(\alpha_1')[\cup]\tan(\alpha_2'), +\infty[$$

$\tan\alpha < \tan(\alpha_1')$ أو $\tan\alpha > \tan(\alpha_2')$ إذن

لدينا

$$\begin{cases} \tan\alpha_1 < \tan\alpha < \tan\alpha_2 \\ \tan\alpha < \tan(\alpha_1') \text{ أو } \tan\alpha > \tan(\alpha_2') \end{cases}$$



الحل النهائي

إذن الحل المقبول هو $\boxed{\tan(\alpha_2') < \tan\alpha < \tan(\alpha_2)}$

أي أن $\boxed{\alpha_2' < \alpha < \alpha_2}$

8.1. من تطبيق القانون II لنيوتن لدينا $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{m\vec{g} - \lambda\vec{v} = m\vec{a}}$$

نسقط العلاقة على المحورين:

$$\begin{cases} (x) & -\lambda v_x = m a_x \\ (z) & -mg - \lambda v_z = m a_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} + \dfrac{\lambda}{m} v_x = 0 \\ \dfrac{dv_z}{dt} + \dfrac{\lambda}{m} v_z = -g \end{cases}} \quad (\mathrm{I})$$

8.2 تعيين كل من v_x و v_z:

بكتابة المعادلات التفاضلية السابقة على الشكل التالي

$$v(t) = A e^{-\beta t} + B$$

لنحدد v_x: نعوض في تعبير الحل في المعادلة (I)

$$-A\beta e^{-\beta t} + \frac{\lambda}{m}\left(A e^{-\beta t} + B\right) = 0 \Rightarrow A e^{-\beta t}\left(\frac{\lambda}{m} - \beta\right) + B = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\lambda}{m}} , \boxed{B = 0}$$

$$\boxed{v_x(t) = A e^{-\frac{\lambda}{m}t}} , \quad v_x(t=0) = A = v_{0x} = -v_0\cos\alpha$$

$$\boxed{A = -v_0\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x(t) = -v_0\cos\alpha \, e^{-\frac{\lambda}{m}t}}$$

لنحدد v_z:

بنفس الطريقة نجد: $\boxed{B = -\frac{m}{\lambda}g}$ و $\boxed{\beta = \frac{\lambda}{m}}$

$$v_z(t=0) = A e^{0} - \frac{m}{\lambda}g = v_{0z} = v_0\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{A = v_0\sin\alpha + \frac{m}{\lambda}g}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_z(t) = \left(v_0\sin\alpha + \frac{m}{\lambda}g\right) e^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{mg}{\lambda}}$$

3.8 . نبين $x(t)$, $z(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -v_0 \cos\alpha \, e^{-\frac{\lambda}{m}t} \\ \dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{mg}{\lambda} + \left(v_0 \sin\alpha + \dfrac{m}{\lambda} g\right) e^{-\frac{\lambda}{m}t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = -v_0 \cos\alpha \, e^{-\frac{\lambda}{m}t} \, dt \\ dz = \left[-\dfrac{mg}{\lambda} + \left(v_0 \sin\alpha + \dfrac{m}{\lambda} g\right) e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right] dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^x dx = +v_0 \cos\alpha \, \frac{m}{\lambda} \left[e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right]_0^t \\ \displaystyle\int_0^z dz = -\left(v_0 \sin\alpha + \frac{m}{\lambda} g\right) \frac{m}{\lambda} \left[e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right]_0^t - \frac{mg}{\lambda} \left[t\right]_0^t \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{m v_0 \cos\alpha}{\lambda} \left[e^{-\frac{\lambda}{m}t} - 1\right] \\ z(t) &= \frac{m}{\lambda} \left(\frac{m}{\lambda} g + v_0 \sin\alpha\right) \left[1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right] - \frac{mg}{\lambda} t \end{aligned}}$$