

2- الحركات المستوية :

2-1- حركة قذيفة في مجال الثقالة المنتظم :



نسمي قذيفة كل جسم يُرسل على مقربة من الأرض بسرعة بدئية \vec{v}_0 . لتبسيط الدراسة ، نُهمل جميع الاحتكاكات ونعتبر القذيفة خاضعة لوزنها فقط (سقوط حر) .

في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ ، نرسل من نقطة O جسما صلبا (S) كتلته m بسرعة بدئية \vec{v}_0 تكون زاوية α مع الأفقي . نعتبر مجال الثقالة منتظما .

2-1-1- المعادلات التفاضلية :

المجموعة المدروسة : { الجسم (S) } وتتم دراسة الحركة في المعلم المتعامد الممنظم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المرتبط بالأرض الذي نعتبره غاليليا .
جرد القوى : وزنها \vec{P} .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نجد $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{g} = m \cdot \vec{a}_G$

أي $\vec{a}_G = \vec{g}$ حيث في المعلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا :

نسقط العلاقة المتجهية في $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ فنجد

$$\vec{a}_G(t) \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases}$$

المعادلات التفاضلية للحركة

نستنتج أن اتجاه متجهة التسارع \vec{a}_G رأسي ومنحاهها نحو الأسفل ومنظمها هو

$$a_G = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |a_z| = g$$

2-1-2- حل المعادلات التفاضلية :

الشروط البدئية عند اللحظة $t = 0$:

$$\vec{v}_{G0} \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{و} \quad \vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

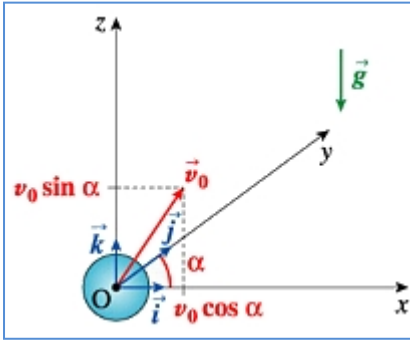
ونعلم أن $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt}$ إذن :

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t) = -g \end{cases}$$

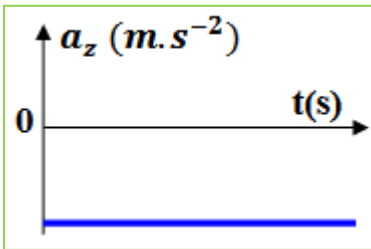
و بعملية التكامل نحصل على :

$$\vec{v}_G(t) \begin{cases} v_x(t) = C_1 = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = C_2 = v_{0y} = 0 \\ v_z(t) = -gt + C_3 = -gt + v_{0z} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

وهي تمثل المعادلات الزمنية لمتجهة السرعة .



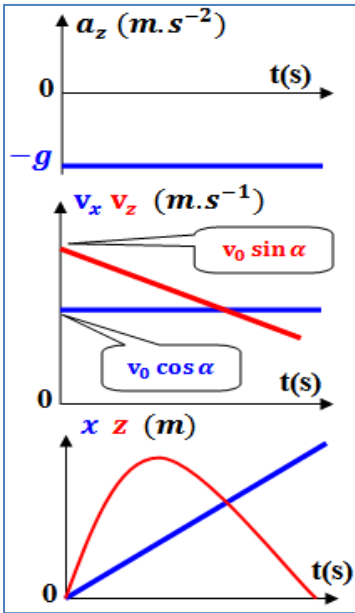
أثناء السقوط الرأسي الحر لقذيفة بسرعة بدئية غير رأسية ، تكون $\vec{a}_G = \vec{g}$.



$$\frac{d\vec{OG}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ \frac{dy}{dt} = v_y(t) = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v_z(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{ونعلم أن } \vec{v}_G(t) = \frac{d\vec{OG}}{dt} \text{ إذن :}$$

$$\vec{OG}(t) \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha t + C_4 = v_0 \cos \alpha t \\ y(t) = C_5 = y_0 = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + C_6 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases} \quad \text{وبعملية التكامل نحصل على :}$$

وهي تمثل المعادلات الزمنية لمتجهة الموضع .



■ بما أن $y(t) = 0$ فإن الحركة مستوية وتتم في المستوى الرأسي (G, \vec{v}_0, \vec{g}) .
 ■ دالة $x(t)$ دالة خطية ، إذن ، على المحور (O, \vec{i}) الحركة مستقيمة منتظمة .
 ■ دالة $z(t)$ دالة من الدرجة الثانية ، إذن ، على المحور (O, \vec{k}) الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

2-1-3- مسار مركز القصور :

2-1-3-1- معادلة المسار :

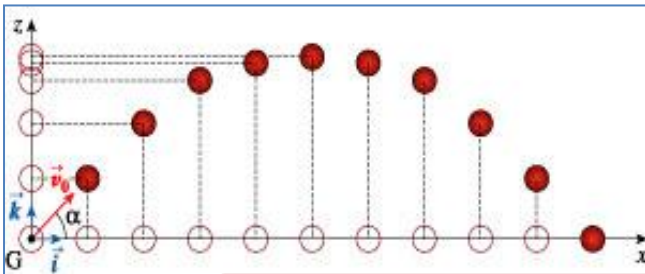
للحصول على معادلة المسار يجب إيجاد تعبير z بدلالة x وذلك بإقصاء الزمن .

$$\text{لدينا } x(t) = (v_0 \cos \alpha)t \text{ أي } t = \frac{x(t)}{v_0 \cos \alpha}$$

نعوض تعبير t في المعادلة الزمنية لـ z فنجد :

$$z(x) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + (v_0 \sin \alpha) \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$\text{إذن } z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x$$



$z(x)$ دالة من الدرجة الثانية ، أي تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم ينتمي إلى مستوى القذف . إذن ، الحركة شلجمية .

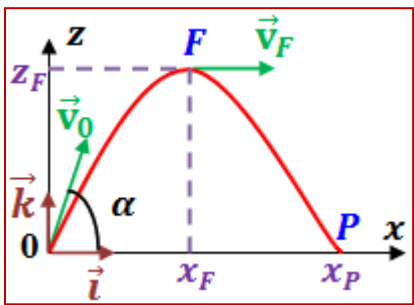
2-3-1-2- قمة المسار :

قمة المسار F هي أعلى نقطة يصل إليها مركز قصور القذيفة .

عند قمة المسار F تكون \vec{v}_z أفقية ، وبالتالي $v_z = \frac{dz}{dt} = 0$

$$\text{أي } -t_F + v_0 \sin \alpha = 0 \text{ إذن } t_F = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\text{وهكذا نجد إحداثيات } F \text{ هي : } x_F = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \text{ و } z_F = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$



$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

ملحوظة : نحصل على أقصى قيمة لقمة المسار في حالة إرسال القذيفة رأسياً نحو الأعلى (أي $\alpha = \frac{\pi}{2}$) .

2-3-1-2- المدى :

المدى هو المسافة بين الموضع G_0 لمركز قصور القذيفة لحظة انطلاقها والموضع P للنقطة G أثناء سقوط القذيفة بحيث تنتمي P إلى المحور الأفقي الذي يشمل G_0 .

لدينا $z_P = 0$ أي $\left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_P + \tan \alpha\right) x_P = 0$ إذن حلا هذه المعادلة هما :

إما $z_P = 0$ أو $x_P = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ (نلاحظ أن $x_P = 2 \cdot x_F$) .

بالنسبة لقيمة v_0 يكون المدى أقصى إذا كان $\sin 2\alpha = 0$ (أي $\alpha = 45^\circ$) بحيث $x_{Pmax} = \frac{v_0^2}{g}$.

ملحوظة: من خلال العلاقتين $x_P = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ و $z_F = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ يتبين لنا :

المنحنى	الملاحظات	
	<ul style="list-style-type: none"> ■ يتزايد المدى عندما تكبر α بين $[0^\circ; 45^\circ]$ ■ يتناقص المدى عندما تكبر α بين $[45^\circ; 90^\circ]$ ■ يأخذ المدى قيمة قصوى عند $\alpha = 45^\circ$ ■ يكون للمدى القيمة نفسها بالنسبة لزاويتين متكاملتين $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ■ يزداد z_F أنسوب قمة المسار بزيادة α 	<p>بالنسبة لقيمة ثابتة للسرعة البدئية v_0</p>
	<p>يزداد المدى و أنسوب قمة المسار كلما زادت قيمة السرعة البدئية v_0</p>	<p>بالنسبة لقيمة ثابتة لزاوية القذف α</p>

2-2- حركة جسم صلب على مستوى مائل :

في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ ، نرسل حاملا ذاتيا كتلته m فوق منضدة مائل بزاوية β عن الخط الأفقي بسرعة بدئية تكوّن زاوية α مع الحافة السفلى للمنضدة . نهمل جميع الاحتكاكات .

2-2-1- المعادلات التفاضلية :

المجموعة المدروسة : { الحامل الذاتي } وتتم دراسة الحركة في المعلم المتعامد المنظم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المرتبط بالأرض الذي نعتبره غاليليا .

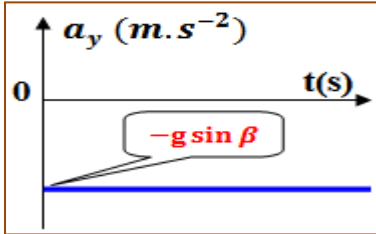
جهد القوى : وزنه \vec{P} وتأثير المنضدة \vec{R} .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نجد $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$

في المعلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا : $\vec{P} \begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \sin \beta \\ P_z = -mg \cos \beta \end{cases}$ و $\vec{R} \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = R_N \end{cases}$

$$\vec{a}_G(t) \begin{cases} a_x(t) \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = 0 \end{cases} \quad (a_z = 0 \text{ لأن حركة الحامل الذاتي تتم على المستوى } (oxy)).$$

$$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -mg \sin \beta \\ ma_z = R_N - mg \cos \beta = 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} P_x + R_x = ma_x \\ P_y + R_y = ma_y \\ P_z + R_z = ma_z \end{cases} \quad \text{فنجد } \mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$



$$\vec{a}_G(t) \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \sin \beta \\ a_z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{وبالتالي المعادلات التفاضلية للحركة هي:}$$

$$a_G = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |a_y| = g \sin \beta = cte \quad \text{التسارع ثابت}$$

2-2-2- حل المعادلات التفاضلية :

$$\vec{v}_{G0} \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \\ v_{0z} = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{الشروط البدئية عند اللحظة } t = 0$$

$$\text{ونعلم أن } \vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{إذن:} \quad \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) = -g \sin \beta \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{وهي تمثل المعادلات التفاضلية للحركة.}$$

$$\vec{v}_G(t) \begin{cases} v_x(t) = C_1 = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = -(g \sin \beta)t + C_2 = -(g \sin \beta)t + v_0 \sin \alpha \\ v_z(t) = C_3 = v_{0z} = 0 \end{cases} \quad \text{و بعملية التكامل نحصل على:}$$

وهي تمثل المعادلات الزمنية لمتجهة السرعة .

$$\frac{d\vec{OG}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ \frac{dy}{dt} = v_y(t) = -(g \sin \beta)t + v_0 \sin \alpha \\ \frac{dz}{dt} = v_z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{ونعلم أن } \vec{v}_G(t) = \frac{d\vec{OG}}{dt} \quad \text{إذن:}$$

$$\vec{OG}(t) \begin{cases} x(t) = (v_0 \cos \alpha)t + C_4 = (v_0 \cos \alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}(g \sin \beta)t^2 + (v_0 \sin \alpha)t \\ z(t) = C_6 = z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{و بعملية التكامل نحصل على:}$$

وهي تمثل المعادلات الزمنية لمتجهة الموضع .

■ بما أن $z(t) = 0$ فإن الحركة مستوية وتتم في المستوى المائل (O, \vec{i}, \vec{j}) .

■ $x(t)$ دالة خطية ، إذن ، على المحور (O, \vec{i}) الحركة مستقيمة منتظمة .

■ $y(t)$ دالة من الدرجة الثانية ، إذن ، على المحور (O, \vec{j}) الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

■ معادلة المسار : $y(x) = -\frac{g \sin \beta}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x$