

# السقوط الرأسي لجسم صلب

## I - مجال الثقالة

### تعريف

كل جسم موجود على سطح الأرض أو في الحيز المحيط بها يخضع لقوة مطبقة من طرف الأرض تسمى بوزن الجسم ونرمز لها ب  $\vec{P}$  . هذه القوة هي ناتجة عن المجال المحدث من طرف الأرض يسمى بمجال الثقالة ونرمز له ب  $\vec{g}$

العلاقة بين  $\vec{P}$  و  $\vec{g}$  هي :  $\vec{g} = \frac{1}{m} \vec{P}$  حيث  $m$  كتلة الجسم .

مميزات متجهة مجال الثقالة :

- الاتجاه : الرأسي المار من مركز قصور الجسم .

- المنحى : نحو الأرض

- المنظم : شدة مجال الثقالة ونعبر عنها بالوحدة  $N/kg^{-1}$

**ملحوظة :** تتعلق شدة مجال الثقالة بالارتفاع وبخط العرض .

## II - القوى المطبقة من طرف مائع .

### 1- قوى الاحتكاك المائع

كل جسم في حركة داخل مائع

تكافئ هذه القوى المطبقة من طرف المائع على الجسم المتحرك ، قوة وحيدة تسمى قوة المائع

مميزات قوة الاحتكاك المائع :

الأصل : مركز قصور الجسم

خط تأثيرها هو اتجاه متجهة سرعة مركز القصور  $G$  للجسم

المنحى : عكس منحى متجهة مركز قصور الجسم

الشدة :

المتحرك بالنسبة للمائع .

ننمذج شدتها بالعلاقة التالية :  $f = k.v_G^n$  حيث  $k$  ثابتة تتعلق بطبيعة المائع وبشكل الجسم الصلب

نضع  $v_G = v$  ، فتصبح العلاقة  $f = k.v^n$  .

**ملحوظة :** عندما تكون قيمة السرعة صغيرة ، نأخذ  $n=1$  ، فتصبح العلاقة السابقة كالآتي :  $f = k.v$  ،

في هذه الحالة تتعلق  $k$  بلزوجة المائع .

عندما تكون قيمة السرعة  $v$  كبيرة ، نأخذ  $n=2$  تصبح العلاقة السابقة  $f = k.v^2$  في هذه الحالة ،

لاتتعلق  $k$  بلزوجة المائع ، بل تتعلق بكتلته الحجمية.

### 2 - دافعة أرخميدس

يخضع كل جسم مغمور كلياً أو جزئياً في مائع لقوى تماس ضاغطة مطبقة على سطح الجسم ،

يسمى مجموع هذه القوى بدافعة أرخميدس .

مميزاتها هي :

- نقطة تأثيرها : مركز ثقل المائع المزاح

- الاتجاه : الخط الرأسي

- المنحى : نحو الأعلى

- الشدة : تساوي شدة وزن الحجم المزاح للمائع :  $\vec{F}_A = -\rho_f.V.\vec{g}$

بحيث أن  $\rho_f$  الكتلة الحجمية للمائع ب  $kg/m^3$

$V$  الحجم المزاح للمائع ( $m^3$ )

$g$  : شدة مجال الثقالة ( $N/kg$ ) أو  $m/s^2$

$F_A$  شدة دافعة أرخميدس (N)

ملحوظة :  $\vec{F}_A = -\vec{P}_f$  ، هي وزن الحجم المزاح .

نبين أن  $\frac{\vec{F}_A}{\vec{P}_s} = \frac{\rho_f}{\rho_s}$  حيث  $P_s$  هو وزن الجسم الصلب المغمور في المائع و  $\rho_s$  كتلته الحجمية .

إذا كانت  $\rho_f$  أصغر بكثير من  $\rho_s$  فإن  $F_A$  تصغر بكثير من  $P_s$  هذه الحالة نجدها عندما يكون المائع غليزيا .

### III - السقوط الرأسي باحتكاك

#### النشاط التجريبي

الهدف من التجربة : نمذجة حركة سقوط كرية في مائع بطريقة أولير

العدة التجريبية : مخبار مدرج من فئة 1l . محلول الغليسيرول المخفف كتلته الحجمية

$\rho_f = 1,07 \text{ g/ml}$  ، كرية فولاذية كتلتها  $m_b = 6,88 \text{ g}$  وشعاعها  $R = 5,9 \text{ mm}$  نسجل حركة الكرية في

السائل بواسطة كاميرا رقمية ونحفظ الشريط المسجل لحركة الكرية في ملف من نوع

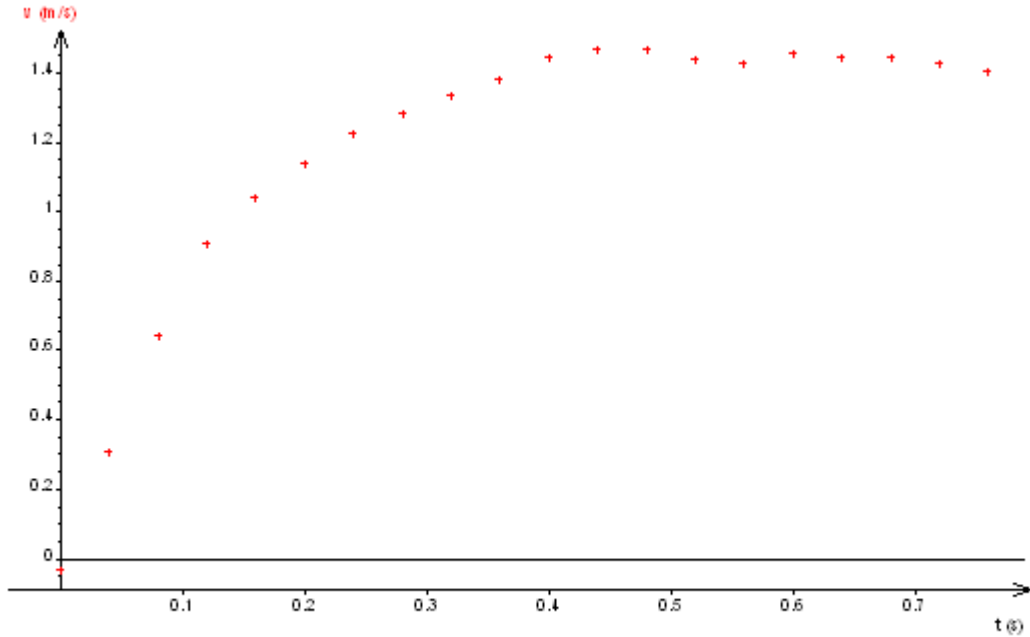
نستعمل برزم أفيمكا Avimeca لعملية تحديد مواضع النقط الموافقة لمواضع G مركز قصور الكرية خلال

سقوطها مع اختيار محور رأسي موجه نحو الأسفل فنكتب قيم الأزواج  $(t, y)$  .

نرسل جدول القياس إلى برزم المجدول وراسم المنحنيات regressi ، وبعد تعريف إحداثية متجهة

السرعة  $\vec{v}_G$  وهي  $v = \frac{dy}{dt}$  ، يقوم البرزم بحساب قيم  $v$  ثم رسم منحنى تغيرات  $v$  بدلالة الزمن  $t$  على

الشاشة ، ثم نحفظ الملف .



منحنى تغير سرعة مركز قصور الكرية خلال سقوطها في سائل الغليسيرول مخفف

استثمار

1 - استغلال المنحنى  $v=f(t)$

أ - يبرز المنحنى وجود نظامين ، حدد مبيانيا المجال الزمني لكل نظام مبرزا طبيعة حركة الكرية في كل نظام .

ب - هل تتزايد أم تتناقص متجهة التسارع  $\vec{a}_G$  مركز قصور الكرية خلال الحركة ؟ علل جوابك .

ج - مثل على الشكل الخط المقارب للمنحنى .

يمثل نقطة تقاطع هذا الخط مع محور السرعات قيمة السرعة الحدية  $v_\ell$  . حدد قيمة  $v_\ell$  .  
 د - مثل في نفس المنحنى ، المماس للمنحنى عند الأصل  $O$  . يتقاطع هذا المماس على الخط المقارب في نقطة أفصولها  $\tau$  نسميه الزمن المميز . عين قيمة  $\tau$  .  
 ه - ما قيمة  $a_0$  لإحداثية  $\vec{a}_0$  على المحور الرأس عند اللحظة  $t=0$  ؟

2 - الدراسة النظرية

أ - أذكر مرجعا يمكن اعتماده في دراسة حركة  $G$  مركز قصور الكرة .  
 ب - أثنا سقوط الكرة ، ما هي القوى المطبقة عليها . حدد مميزات كل القوى المطبقة على الكرة .  
 حدد من بين القوى الثلاث ، القوة التي تتغير شدتها خلال النظام البدئي .  
 ج - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرة أثناء سقوطها الرأسي في المائع في مرجع تحده ، أكتب العلاقة التي تربط بين مجموع القوى الخارجية المطبقة على الكرة و  $m$  كتلة الكرة و متجهة التسارع لمركز قصور الجسم  $\vec{a}_G$  .

د - بإسقاط هذه العلاقة على المحور  $(O, \vec{k})$  الرأسي الموجه نحو الأسفل ، أثبت العلاقة التالية :

$$(1) \frac{dv}{dt} = A - Bv^n$$

ه - بين أن سرعة  $G$  تبلغ قيمة حدية  $v_\ell$  ، واعط تعبير  $v_\ell$  بدلالة  $A$  و  $B$  و  $n$  .

$$(2) \frac{dv}{dt} = A \left( 1 - \left( \frac{v}{v_\ell} \right)^n \right)$$

ز - أوجد التعبير الحرفي للإحداثية  $a$  لمتجهة التسارع  $\vec{a}_G$  على المحور  $(O, \vec{k})$  في اللحظة  $t=0$

### 1 - المعادلة التفاضلية للحركة

دراسة حركة كرة كتلتها  $m$  و حجمها  $V$  وكتلتها الحجمية  $\rho_{bille}$  في مائع كتلته الحجمية  $\rho_{fluide}$  في حالة سكون بالنسبة للجسم المرجعي الأرضي .

بما أم حركة الكرة رأسية ومنحاه نحو الأسفل ، نختار كمعلم متعامد و ممنظم موجه نحو الأسفل  $(O, \vec{k})$  .

- المجموعة المدروسة : الكرة

- جرد القوى المطبقة الخارجية خلال سقوطها :

$$\vec{P} : \text{وزن الكرة} , \vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

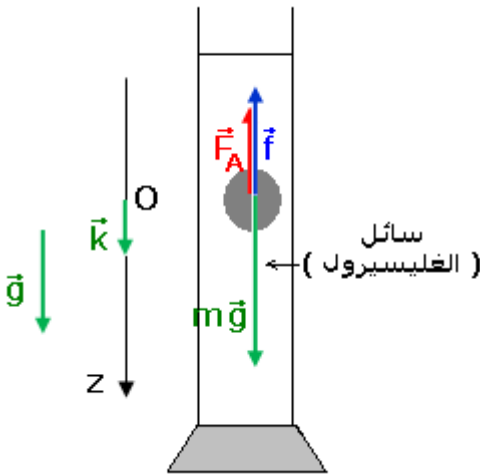
$$\vec{F}_A : \text{دافعة أرخميدس} : \vec{F}_A = -m_f \cdot \vec{g} = -\rho_f \cdot V \cdot \vec{g}$$

$$\vec{f} : \text{قوة الاحتكاك المائع} : \vec{f} = -k \cdot v^n \cdot \vec{k}$$

- نطبق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m_{bille} \cdot \vec{a}_G$$

نسقط العلاقة المتجهية على المحور  $(O, \vec{k})$  ، نحصل على المتساوية التالية :



$$m_{bille}g - m_f g - kv^n = m_{bille} \cdot a$$

$$(m_b - m_f)g - kv^n = m_b \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$A = \frac{(m_b - m_f)}{m_b} g \quad B = \frac{k}{m_b}$$

$$\frac{dv}{dt} = A - Bv^n$$

تمثل هذه المعادلة ، المعادلة التفاضلية لحركة G مركز قصور الكرية خلال السقوط الرأسي في السائل

## 2 - تحديد المقادير المميزة للحركة

### أ - النظام الدائم : السرعة الحدية للكربة

تبين التجربة أن

$v_\ell$

بحيث تصبح حركة الكرية حركة مستقيمة منتظمة أي أن :  $\frac{dv}{dt} = 0$

في المعادلة التفاضلية للحركة نستنتج :

$$A - Bv_\ell^n = 0 \Rightarrow v_\ell = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$v_\ell = \left(\frac{g}{k}(m_b - m_f)\right)^{\frac{1}{n}}$$

- عندما تقارب سرعة الكرية السرعة الحدية  $v_\ell$  تخضع حركة G إلى نظام يسمى **النظام الدائم** ويتميز بثبات السرعة .

### ب - النظام البدئي

قبل تحرير الكرية فهي تخضع إلى قوى مجموعها منعدم .

في اللحظة  $t_0=0$

الرأسي للكربة وتتزايد سرعته مركز قصورها : تسمى هذه المرحلة **بالنظام البدئي** بعد ذلك تتطور

حركة G نحو نظام دائم يصبح فيه مجموع القوة المطبقة على الكرية مرة أخرى منعدم :  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

أي أن  $a=0$  .

في المعادلة التفاضلية ، عند اللحظة  $t_0=0$  لدينا  $a_G(t_0=0) = a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_0=0}$  بحيث أن  $a_0$  هو

التسارع البدئي لمركز القصور G للكربة . لدينا كذلك  $\vec{f} = \vec{0}$

$$(m_b - m_f)g = m_b \cdot a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{(m_b - m_f)g}{m_b}$$

مبانيا ، تساوي قيمة التسارع البدئي قيمة المعامل الموجه للمماس للمنحنى .  $t_0=0$

ج - الزمن المميز للحركة

يتقاطع الخط المماس للمنحنى  $v=f(t)$  مع الخط المقارب للمنحنى في نقطة أفصولها  $\tau$  نسميه

### الزمن المميز للحركة

تحدد قيمة  $\tau$  بالعلاقة :  $v_\ell = a_0 \tau$

**ملحوظة :** تمكن قيمة  $\tau$  من إعطاء رتبة قدر مدة النظام البدئي .

### 3 - حل المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق طريقة أولير Euler

أ - مبدأ الطريقة

– تمكن طريقة أولير من التوصل لحل تقريبي للمعادلة التفاضلية للحركة بتعويض بحيث نعلم أن

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow a(t) = \left( \frac{dv}{dt} \right) \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t) \cdot \Delta t \quad (1)$$

تتضمن هذه الطريقة مرحلتين من الحساب التي يجب إنجازها بصفة تكرارية لهذا نم وصفها بطريقة رقمية تكرارية . كما أن استعمال هذه الطريقة يستوجب معرفة سرعة مركز القصور في لحظة t والتي ما تكون في غالب الأحيان هي السرعة البدئية  $v_0$  في اللحظة  $t=0$  .  
المرحلة الأولى :

من خلال العلاقة (1) والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي :  $v(t_{i+1}) = v(t_i) + a(t_i) \cdot \Delta t$  بحيث أن

$$a_i = A - B \cdot v_i^n$$

$$a_0 = A - B v_0^n \text{ لدينا } t=0$$

في المرحلة الثانية :

$$v_1 = v_0 + a_0 v_0^n \Delta t$$

$\Delta t$  تسمى خطوة الحساب

ونعيد حساب التسارع والسرعة المواليين بنفس الطريقة  
ثم نبحت عن قيم n و A و B التي تمكن من تطابق القيم النظرية المحصلة باستعمال طريقة أولير مع القيم التجريبية أي تطابق المنحنيين .

## VI – السقوط الرأسي الحر .

### 1 – تعريف

السقوط الحر لجسم صلب هو حركة مركز القصور هذا الجسم في مرجع أرضي عندما يخضع الجسم لقوة الثقالة فقط .

نظريا يكون السقوط حرا إذا تم قي الفراغ ،

عالية وشكله انسيابي ، ومنطقة سقوطه محدودة في مجال الثقالة .

2 – متجهة التسارع  $a_G$  لمركز القصور .

نعتبر السقوط الحر لجسم صلب في مجال الثقالة وفي مرجع أرضي . أي أن الجسم يوجد تأثير وزنه فقط .

$$\vec{g} = \vec{a}_G \text{ نطبق القانون الثاني لنيوتن : } \vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \vec{a}_G \text{ أي أن } \vec{g} = \vec{a}_G$$

3 – المعادلة الزمنية للحركة

في المعلم  $(O, \vec{k})$  الموجه نحو الأسفل نسقط العلاقة فنحصل على :

$$a_z = g \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = g \Rightarrow v_z = gt + C$$

$$v_z(t=0) = v_0 = 0 \text{ أي أن } v_z = gt \text{ ونستنتج أن سرعة } G \text{ دالة زمنية خطية .}$$

بنفس الطريقة نبحت عن  $z(t)$  :

$$v_z = \frac{dz}{dt} = gt \Rightarrow z(t) = \frac{1}{2} gt^2 + C'$$

$z(0) = z_0 = 0$  وبالتالي فإن  $C' = 0$  أي أن المعادلة الزمنية لحركة السقوط الحر للجسم الصلب بدون سرعة

$$\text{بدئية ومن النقطة } O \text{ تم اختيارها كأصل معلم الزمن هي : } z(t) = \frac{1}{2} gt^2 .$$

وهذه المعادلة نعتمها بالنسبة لجميع الأجسام الصلبة التي تطلق بدون سرعة بدئية في سقوط حر أي أنها تسقط بنفس الحركة ، **حركة مستقيمة متغيرة بانتظام** .

تمرين تطبيقي 1 :

I – تسقط كرة رأسيا بدون سرعة بدئية . نعتبر السقوط حرا ونقوم بدراسته في معلم متعامد وممنظم  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  محوره  $(O, \vec{k})$  رأسي وموجه نحو الأسفل .

1 – ما طبيعة مسار G مركز قصور الكرة ؟

2 – أجرد القوى المطبقة على الكرة أثناء سقوطها . ما القوى التي نهملها أمام وزن الجسم ؟ وما هي الشروط لكي نقوم بهذا الإهمال ؟

3 – عبر بدلالة الزمن t عن الأنسوب z للنقطة G .

4 – أحسب السرعة التي ستصل بها الكرة إلى الأرض . نعطي  $h=2m$  .

II – السرعة البدئية في اللحظة  $t=0$  لمركز قصور الكرة أرسلت رأسيا نحو الأعلى تساوي  $v_0=15,0m/s$

1 – اعط تعبير الإحداثية v لمتجهة السرعة لمركز القصور الكرة لمحور رأسي  $(O, \vec{k})$  موجه نحو الأعلى

للمعلم المتعامد والممنظم  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  .

2 – أوجد تعبير  $t_M$  تاريخ اللحظة الموافقة للارتفاع الأقصى  $z_M$  للنقطة G ، واحسب قيمته .

3 – أحسب قيمة  $z_M$  .