

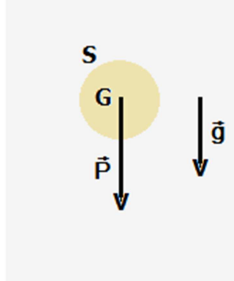
## تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب

### السقوط الرأسي لجسم صلب

#### I - مجال الثقالة

##### تعريف

جميع الأجسام الموجودة على سطح الأرض أو في الحيز المحيط بها تخضع لقوة مطبقة من طرف الأرض تسمى بوزن الجسم ونرمز لها ب  $\vec{P}$  . و هي ناتجة عن المجال المحدث من طرف الأرض يسمى بمجال الثقالة ونرمز له ب  $\vec{g}$  بحيث أن :



$$\vec{P} = m\vec{g} \quad (1)$$

مميزات متجهة مجال الثقالة  $\vec{g}$  :

- الاتجاه : الرأسي المار من مركز قصور الجسم .

- المنحى : نحو الأرض

- المنظم : شدة مجال الثقالة ونعبر عنها بالوحدة  $N/kg^{-1}$

**ملحوظة :** تتعلق شدة مجال الثقالة بالارتفاع وبخط العرض .

#### II - القوى المطبقة من طرف مائع على جسم صلب .

##### 1- قوى الاحتكاك المائع

كل جسم في حركة داخل مائع ، يخضع إلى قوى احتكاك مطبقة عليه من طرف هذا الأخير . ( قوى التماس وموزعة )

تكافئ هذه القوى ، قوة وحيدة تسمى **قوة الاحتكاك المائع** ورمز لها ب  $\vec{f}$

##### مميزات قوة الاحتكاك المائع :

الأصل : مركز قصور الجسم

خط تأثيرها هو اتجاه متجهة سرعة مركز القصور G للجسم

المنحى : عكس منحى متجهة مركز قصور الجسم

الشدة : تتعلق بشكل الجسم وبأبعاده ، وبحالة سطحه ، وتتعلق كذلك بلزوجة المائع وبسرعة

الجسم المتحرك بالنسبة للمائع

ننمذج شدتها بالعلاقة التالية :  $f = k.v_G^n$  حيث k ثابتة تتعلق بطبيعة المائع وبشكل الجسم الصلب

نضع  $v_G = v$  ، فتصبح العلاقة

$$f = k.v^n \quad (2)$$

**ملحوظة :** عندما تكون قيمة السرعة صغيرة ( أقل من 1cm/s ) ، نأخذ  $n=1$  ، فتصبح العلاقة

السابقة كالآتي :  $f = k.v$  ، في هذه الحالة تتعلق k بلزوجة المائع .

عندما تكون قيمة السرعة  $v$  متوسطة ( أكبر من 1cm/s وأقل من 10m/s ) ، نأخذ  $n=2$  تصبح

العلاقة السابقة  $f = k.v^2$  في هذه الحالة ، لاتتعلق k بلزوجة المائع ، بل تتعلق بكتلته الحجمية.

##### 2 - دافعة أرخميدس

يخضع كل جسم مغمور كلياً أو جزئياً في مائع لقوى تماس ضاغطة مطبقة على سطح الجسم ، يسمى مجموع هذه القوى

##### بدافعة أرخميدس .

مميزاتها هي :

- نقطة تأثيرها : مركز ثقل المائع المزاح

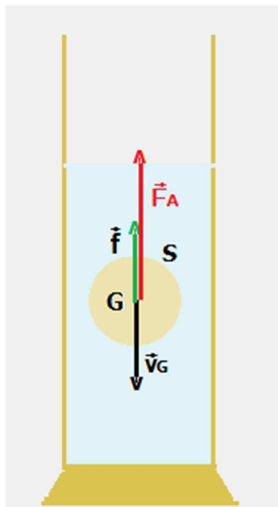
- الانجاه : الخط الرأسي

- المنحى : نحو الأعلى

- الشدة : تساوي شدة وزن الحجم المزاح للمائع :  $F_A = m_0g = \rho_f.V.g$  (3) بحيث أن  $m_0$  كتلة

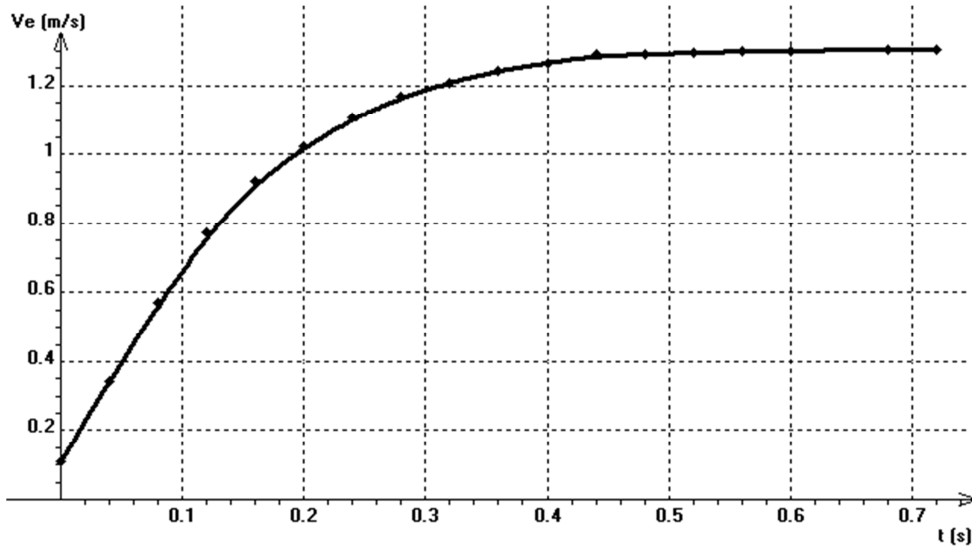
المائع المزاح و  $\rho_f$  الكتلة الحجمية للمائع ب  $kg/m^3$  و  $V$  الحجم المزاح للمائع ( $m^3$ ) و  $g$

شدة مجال الثقالة ( $N/kg$ ) أو  $m/s^2$  ،  $F_A$  شدة دافعة أرخميدس (N)



III - السقوط الرأسى لجسم صلب بالإحتكاك  
1 - الدراسة التجريبية

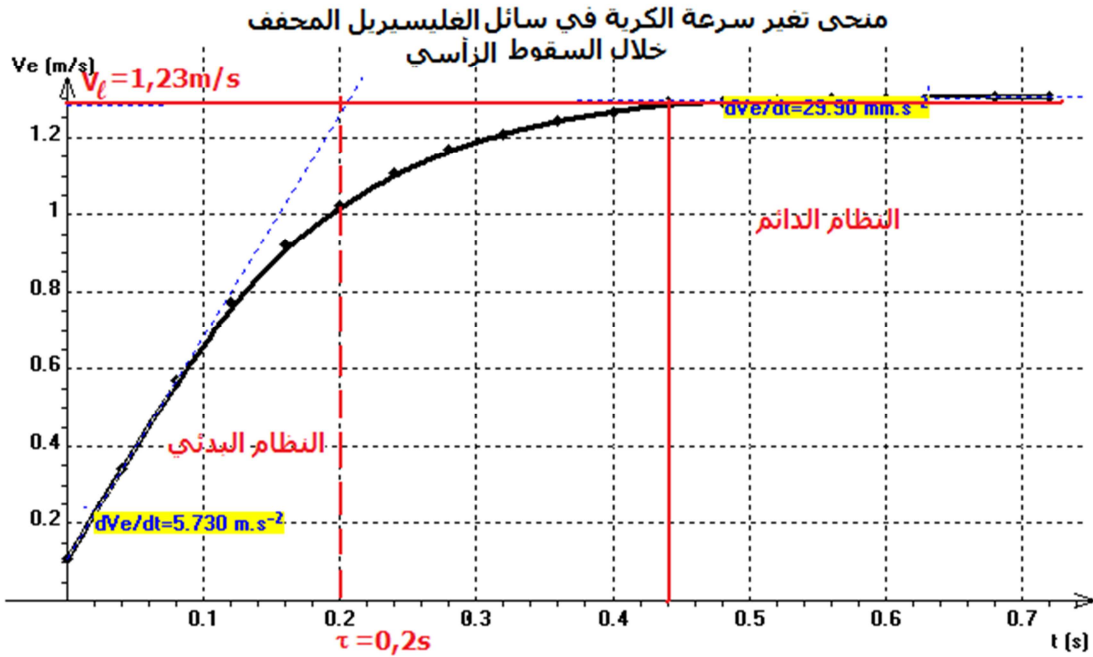
الهدف من التجربة : نمذجة حركة سقوط كرية في مائع بطريقتة أولير  
العدة التجريبية : مخبار مدرج من فئة 1l . محلول الغليسيرول المخفف كتلته الحجمية  $\rho_f = 1,07 \text{ g/ml}$  ، كرية فولاذية كتلتها  $m_b = 6,88 \text{ g}$  وشعاعها  $R = 5,9 \text{ mm}$  نسجل حركة الكرية في السائل بواسطة كاميرا رقمية ونحفظ الشريط المسجل لحركة الكرية في ملف من نوع (avi) .  
نستعمل برنم أفيميك Avimeca لعملية تحديد مواضع النقط الموافقة لمواضع G مركز قصور الكرية خلال سقوطها مع اختيار محور رأسى موجه نحو الأسفل فنكتب قيم الأزواج  $(t, y)$  .  
نرسل جدول القياس إلى برنم المجدول وراسم المنحنيات regressi ، وبعد تعريف إحداثية متجهة السرعة  $\vec{v}_G$  وهي  $v = \frac{dy}{dt}$  ، يقوم البرنم بحساب قيم  $v$  ثم رسم منحنى تغيرات  $v$  بدلالة الزمن  $t$  على الشاشة ، ثم نحفظ الملف .



استثمار

1 - استغلال المنحنى  $v=f(t)$

المنحنى المحصل عليه بواسطة البرنم Regressi :



## تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب

أ - يبرز المنحنى وجود نظامين ، حدد مبيانيا المجال الزمني لكل نظام مبرزا طبيعة حركة G مركز قصور الكرية في كل نظام .

– النظام البدئي :  $v_{exp}$  دالة زمنية متغيرة

– في النظام الدائم :  $v_{exp} \approx v_\ell$  أي تبقى ثابتة خلال الزمن .

ب - هل تتزايد أم تتناقص متجهة التسارع  $\vec{a}_G$  مركز قصور الكرية خلال الحركة ؟ علل جوابك .

– في النظام البدئي :  $a_G(t) = \frac{\Delta v_G}{\Delta t}$  عمليا يمثل هذا التغير المعامل الموجه للدالة  $v_G$  عند كل لحظة t ، ومن خلال المنحنى

يلاحظ أن المعامل الموجه يتناقص مع الزمن t و كذلك التسارع  $a_G$  :

– عند  $t=0$  لدينا  $\left(\frac{dv_G}{dt}\right)_{t=0}$  قسوية

– في النظام الدائم  $t \rightarrow +\infty$  لدينا  $\left(\frac{dv_G}{dt}\right)_{t=+\infty} = 0$  لكون أن  $v_G = v_\ell$  أي أن حركة الكرية رأسية منتظمة .

وبالتالي فإن متجهة التسارع تتناقص إلى أن تأخذ قيمة منعدمة .

ج - مثل على الشكل الخط المقارب للمنحنى .

يمثل نقطة تقاطع هذا الخط مع محور السرعات قيمة السرعة الحدية  $v_\ell$  . حدد قيمة  $v_\ell$  .

تحديد قيمة  $v_\ell$  :  $v_\ell = 1,23 \text{ m/s}$

د - مثل في نفس المنحنى ، المماس للمنحنى عند الأصل 0 . يتقاطع هذا المماس على الخط المقارب في نقطة أفصولها  $\tau$  نسميه الزمن المميز . عين قيمة  $\tau$  .

لدينا  $\tau = 0,2 \text{ s}$

هـ - ما قيمة  $a_0$  لإحداثية  $\vec{a}_0$  على المحور الرأسي عند اللحظة  $t=0$  ؟

قيمة  $a_0$  ، المعامل الموجه في النقطة  $t=0$  :

$$a_0 = \left(\frac{dv_G}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\Delta v_G}{\Delta t} = \frac{v_\ell}{\tau} = 6,12 \text{ m/s}^2$$

### 2 - الدراسة النظرية

أ - أذكر مرجعا يمكن اعتماده في دراسة حركة G مركز قصور الكرية .

مرجعا مرتبط بالمختبر والذي يعتبر كمرجع غاليلي .

ب - المعادلة التفاضلية للحركة

أثناء سقوط الكرية ، ما هي القوى المطبقة عليها . حدد مميزات كل القوى المطبقة على الكرية . حدد من بين القوى الثلاث ، القوة التي تتغير شدتها خلال النظام البدئي .

دراسة حركة كرية كتلتها  $m_b$  وحجمها V وكتلتها الحجمية  $\rho_{bille}$  في مائع

كتلته الحجمية  $\rho_{fluide}$  في حالة سكون بالنسبة للجسم المرجعي الأرضي .

بما أن حركة الكرية رأسية ومنحاه نحو الأسفل ، نختار كمعلم متعامد

و ممنتظم موجه نحو الأسفل  $(O, \vec{k})$  .

– المجموعة المدروسة : الكرية

– جرد القوى الخارجية المطبقة على الكرية خلال سقوطها :

$\vec{P}$  : وزن الكرية ،  $\vec{P} = m_b \cdot \vec{g}$

$\vec{F}_A$  : دافعة أرخميدس :  $\vec{F}_A = -m_f \cdot \vec{g} = -\rho_f \cdot V \cdot \vec{g}$

$\vec{f}$  : قوة الاحتكاك المائع :  $\vec{f} = -k \cdot v^n \cdot \vec{k}$

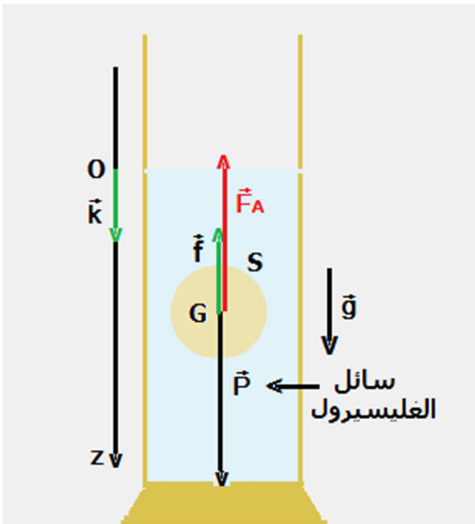
القوة التي تتغير شدتها خلال النظام البدئي هي قوة الاحتكاك المائع

ج - أكتب العلاقة التي تربط بين مجموع القوى الخارجية المطبقة على الكرية و  $m_b$  كتلة الكرية و متجهة التسارع

لمركز قصور الجسم  $\vec{a}_G$  .

نطبق القانون الثاني لنيوتن على الكرية في مرجع مرتبط بالمختبر وهو مرجع غاليليا تكون لدينا العلاقة المتجهية التالية :

$$\vec{f} + \vec{F}_A + \vec{P} = m_b \cdot \vec{a}$$



## تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب

د - بإسقاط هذه العلاقة على المحور  $(O, \vec{k})$  الرأسي الموجه نحو الأسفل ، أثبت العلاقة التالية :

$$(1) \frac{dv}{dt} = A - Bv^n$$

عبر عن  $A$  و  $B$  بدلالة  $m_b$  و  $k$  و  $F_A$  و  $g$  شدة الثقالة .

نسقط العلاقة المتجهية على المحور  $(O, \vec{k})$  ، نحصل على المتساوية التالية :

$$m_{bille}g - m_f g - kv^n = m_{bille} \cdot a$$

$$(m_b - m_f)g - kv^n = m_b \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$A = \frac{(m_b - m_f)}{m_b} g \quad B = \frac{k}{m_b}$$

$$\frac{dv}{dt} = A - Bv^n \quad (4)$$

تمثل هذه المعادلة ، المعادلة التفاضلية لحركة  $G$  مركز قصور الكرية خلال السقوط الرأسي في السائل

### 2 - تحديد المقادير المميزة للحركة

ه - السرعة الحدية للكرية : بين أن سرعة  $G$  تبلغ قيمة حدية  $v_\ell$  ، واعط تعبير  $v_\ell$  بدلالة  $A$  و  $B$  و  $n$  .

تبين التجربة أن متجهة السرعة للكرية تتناهى إلى قيمة حدية ، تسمى بالسرعة الحدية للكرية  $v_\ell$

بحيث تصبح حركة الكرية حركة مستقيمة منتظمة أي أن :  $\frac{dv}{dt} = 0$

في المعادلة التفاضلية للحركة نستنتج :

$$A - Bv_\ell^n = 0 \Rightarrow v_\ell = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$v_\ell = \left(\frac{g}{k}(m_b - m_f)\right)^{\frac{1}{n}} \quad (5)$$

- عندما تقارب سرعة الكرية السرعة الحدية  $v_\ell$  تخضع حركة  $G$  إلى نظام يسمى **النظام الدائم** ويتميز بثبات السرعة .

### 3 - النظام البدئي

و - أحسب قيمة التسارع البدئي  $a_0$  عند اللحظة  $t=0$  .

قبل تحرير الكرية فهي تخضع إلى قوى مجموعها منعدم .

في اللحظة  $t_0=0$  نحرر الكرية ، فيصبح مجموع القوى المطبقة عليها غير منعدم ، فتبدأ حركة السقوط الرأسي للكرية وتزايد

سرعتها مركز قصورها ؛ تسمى هذه المرحلة **بالنظام البدئي** بعد ذلك تتطور حركة  $G$  نحو نظام دائم يصبح فيه مجموع القوى

المطبقة على الكرية مرة أخرى منعدم :  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$  أي أن  $a=0$  .

في المعادلة التفاضلية ، عند اللحظة  $t_0 = 0$  لدينا  $a_G(t_0 = 0) = a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_0=0}$  بحيث أن  $a_0$  هو التسارع البدئي لمركز القصور  $G$

للكرية . لدينا كذلك  $\vec{f} = \vec{0}$

$$(m_b - m_f)g = m_b \cdot a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{(m_b - m_f)g}{m_b} = \left(1 - \frac{m_f}{m_b}\right)g \quad (6)$$

مبيانيا ، تساوي قيمة التسارع البدئي قيمة المعامل الموجه للمماس للمنحنى  $v=f(t)$  عند اللحظة  $t_0=0$  .

$$a_0 = \frac{v_\ell}{\tau} = 6,12m/s^2$$

و - أثبت أن العلاقة (1) تكتب على النحو التالي :  $(2) \frac{dv}{dt} = A \left(1 - \left(\frac{v}{v_\ell}\right)^n\right)$

## تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب

$$a = A - Bv^n \Rightarrow 0 = A - Bv_\ell^n$$

$$v_\ell^n = \frac{A}{B}$$

$$\frac{dv}{dt} = A \left( 1 - \frac{B}{A} v^n \right)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{v_\ell^n} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = A \left( 1 - \left( \frac{v}{v_\ell} \right)^n \right) \quad (7)$$

ويمكن كذلك أن نبين أنه في اللحظة  $t=0$   $a_0 = A$   $\left( \frac{dv}{dt} \right)_{t=0}$  لكون أن  $v=0$

### 4 - الزمن المميز للحركة

يتقاطع الخط المماس للمنحنى  $v=f(t)$  مع الخط المقارب للمنحنى في نقطة أفصولها  $\tau$  نسميه **الزمن المميز للحركة**

$$v_\ell = a_0 \tau \quad (8)$$

**ملحوظة :** تمكن قيمة  $\tau$  من إعطاء رتبة قدر مدة النظام البدئي .

### 5 - حل المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق طريقة أولير Euler

#### أ - مبدأ الطريقة

- تمكن طريقة أولير من التوصل لحل تقريبي للمعادلة التفاضلية للحركة بتعويض  $v(t)$  بدالة تقاربها محليا بحيث نعلم أن

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow a(t) = \left( \frac{dv}{dt} \right) \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t) \cdot \Delta t \quad (9)$$

تتضمن هذه الطريقة مرحلتين من الحساب التي يجب إنجازها بصفة تكرارية لهذا نم وصفها بطريقة رقمية تكرارية .  
كما أن استعمال هذه الطريقة يستوجب معرفة سرعة مركز القصور في لحظة  $t$  والتي ما تكون في غالب الأحيان هي السرعة البدئية  $v_0$  في اللحظة  $t=0$  .

#### المرحلة الأولى :

من خلال العلاقة (1) والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي :  $v_{i+1} = v_i + a_i \times \Delta t$   $v(t_{i+1}) = v(t_i) + a(t_i) \cdot \Delta t$  بحيث أن

$$a_i = A - B \cdot v_i^n$$

$$a_0 = A - B v_0^n \text{ عند اللحظة } t=0 \text{ لدينا}$$

#### في المرحلة الثانية :

$$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$$

$\Delta t$  تسمى خطوة الحساب

ونعيد حساب التسارع والسرعة المواليين بنفس الطريقة

التسارع	السرعة	اللحظة
$a_0 = A - B \times v_0^n$	$v_0$	$t_0 = 0$
$a_1 = A - B \times v_1^n$	$v_1 = v_0 + a_0 \times \Delta t$	$t_1 = t_0 + \Delta t$
$a_2 = A - B \times v_2^n$	$v_2 = v_1 + a_0 \times \Delta t$	$t_2 = t_1 + \Delta t$

ثم نبحث عن قيم  $n$  و  $A$  و  $B$  التي تمكن من تطابق القيم النظرية المحصلة باستعمال طريقة أولير مع القيم التجريبية أي تطابق المنحنيين .

#### استعمال طريقة أولير بواسطة البرنم Regressi :

- ننقر على أيقونة Euler

#### حساب k :

حساب السرعة الحدية :

من خلال الشكل يتبين أن السرعة الحدية  $v_\ell = 1,23 \text{ m/s}$

في المعادلة التفاضلية :

## تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب

$$a = A - Bv^n \Rightarrow 0 = A - Bv_\ell^n$$

$$v_\ell^n = \frac{A}{B}$$

لدينا  $B = \frac{k}{m}$  وبتعويض B في التعبير (1) نحصل على

$$B = \frac{A}{v_\ell^n} \Rightarrow \frac{k}{m_b} = \frac{A}{v_\ell^n}$$

$$k = m_b \cdot \frac{A}{v_\ell^n}$$

**لنحسب A :**

حساب كتلة السائل المزاح :

بما أن الكرة مغمورة كلياً في الماء فإن الحجم المزاح للسائل هو حجم الكرة :  $\rho_f = \frac{m_f}{V_{\text{bille}}} \Rightarrow m_f = \rho_f V_{\text{bille}}$

$$V_{\text{bille}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 0,860\text{cm}^3$$

وبالتالي فإن :  $m_f = \rho_f V_{\text{bille}} = 1,07 \times 0,860 = 0,92\text{g}$

لدينا كذلك كتلة الكرة :  $m_b = 6,88\text{g}$

$$A = 9,81 \left( \frac{m_b - m_f}{m_g} \right) = 8,49\text{m/s}^2$$

مبدأ المعالجة الرقمية بواسطة راسم المنحنيات Regressi :

نقوم بحساب السرعة v خلال مدد زمنية متتالية تساوي  $\Delta t$  تسمى خطوة الحساب نختار  $\Delta t = 0,04\text{s}$

معرفة السرعة  $v_i$  في اللحظة  $t_i$  ، تكون المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :  $\left( \frac{dv}{dt} \right) [i] = A - Bv^n [i]$

نعلم أن التسارع في اللحظة  $t_i$  بطريقة تقريبية هو :

$$\left( \frac{dv}{dt} \right) [i] = \frac{v[i+1] - v[i]}{\Delta t} \Rightarrow v[i+1] = v[i] + \left( \frac{dv}{dt} \right) [i] \cdot \Delta t$$

$$v[i+1] = v[i] + (A - Bv^n [i]) \cdot \Delta t$$

$$v[i+1] = v[i] + A \left( 1 - \frac{B}{A} v^n [i] \right) \cdot \Delta t$$

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{v_\ell^n} \Rightarrow v[i+1] = v[i] + A \left( 1 - \frac{v^n [i]}{v_\ell^n} \right) \cdot \Delta t$$

$$v[i+1] = v[i] + A \left( 1 - \left( \frac{v[i]}{v_\ell} \right)^n \right) \cdot \Delta t$$

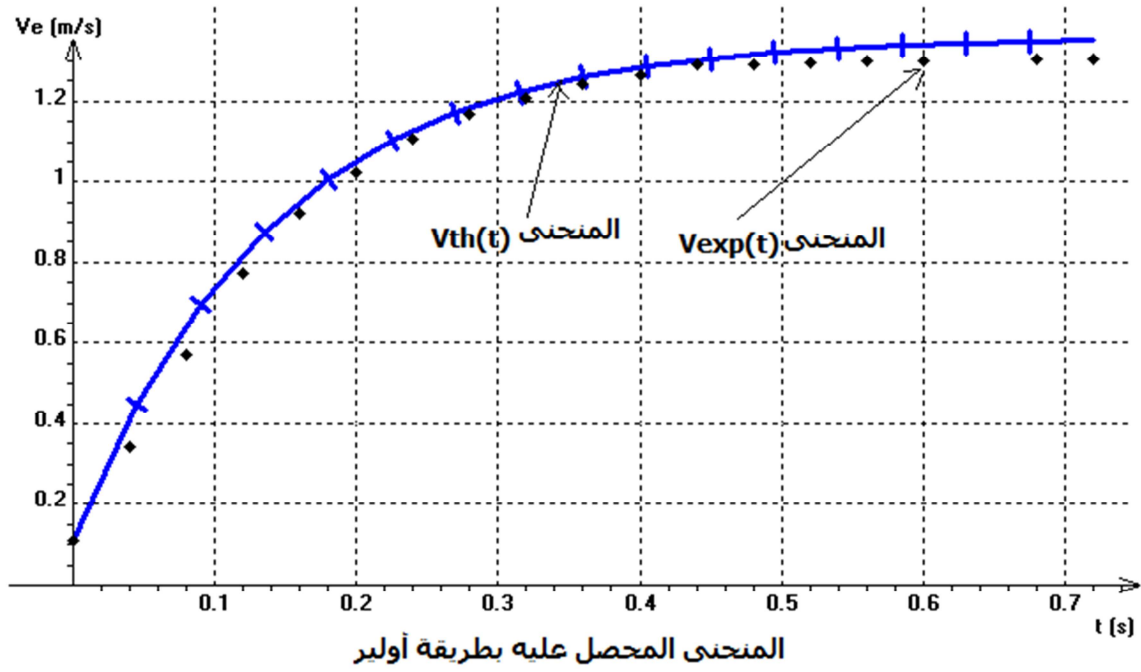
$$v[i] = v[i-1] + A \left( 1 - \left( \frac{v[i-1]}{v_\ell} \right)^n \right) \cdot \Delta t$$

ندخل المعطيات في البرنم الراسم للمنحنيات فنحصل على المنحنى بالأزرق الموافق لطريقة أولير حيث  $A=8,37\text{m/s}^2$  و  $n=1$ .

$$k = m_b \cdot \frac{A}{v_\ell} = 0,0436\text{SI} \quad \text{نحسب k}$$

$$B = \frac{k}{m_b} = 6,34\text{s}^{-1} \quad \text{ونحسب B}$$

## تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسى لجسم صلب



## تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب

### تمارين حول السقوط الرأسي لجسم صلب

#### التمرين 1 : حساب دافعة أرخميدس

لدينا كرية (S) حجمها  $V = 4,4 \times 10^{-6} \text{ m}^3$  وكتلتها  $m = 34 \text{ g}$  . نأخذ شدة مجال الثقالة  $g = 10 \text{ N / kg}$

1 - أحسب P وزن الكرية

2 - توجد الكرية في الهواء حيث كتلتها الحجمية  $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg / m}^3$

2 - 1 أحسب  $F_A$  شدة دافعة أرخميدس المطبقة على الكرية

2 - 2 قارن وزن الكرية وشدة دافعة أرخميدس ( $P / F_A$ )

3 - نجعل الكرية تسقط في سائل حيث كتلتها الحجمية  $\rho_{\text{liq}} = 0,89 \text{ kg / m}^3$

3 - 1 أحسب  $F'_A$  شدة دافعة أرخميدس المطبقة على الكرية

3 - 2 قارن وزن الكرية وشدة دافعة أرخميدس ( $P / F'_A$ )

#### التمرين 2 سقوط قطرة ماء في الهواء

خلال السقوط الرأسي لقطرة ماء حجمها  $V$  في الهواء ، يطبق عليها هذا الأخير ، بالإضافة إلى القوى الأخرى ، قوى احتكاك

تناسب اطرادا و متجهة السرعة  $\vec{v}$  :  $\vec{f} = -k \times \vec{v}$  . k معامل الاحتكاك المائع

نعتبر  $\rho_e$  الكتلة الحجمية للماء و  $\rho_a$  الكتلة الحجمية للهواء .

1 - ما هي وحدة k في النظام العالمي للوحدات ؟

2 - أوجد القوى المطبقة على القطرة

3 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أكتب التعبير المتجهي لمجموع القوى المطبقة على القطرة وعلاقته مع متجهة التسارع  $\vec{a}_G$  .

4 - أثبت المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة  $v$  إحداثية السرعة على المحور Oz الموجه نحو الأسفل .

5 - بين أن القطرة تأخذ سرعة حدية  $v_\ell$  خلال السقوط . عبر عن هذه السرعة بدلالة المعطيات .

6 - أحسب قيمتها

نعطي :  $V = 4,2 \times 10^{-15} \text{ m}^3$  ;  $\rho_e = 1,3 \text{ g / L}$  ;  $k = 3,4 \times 10^{-9} \text{ kg / s}$  ;  $g = 9,8 \text{ m / s}^2$

#### التمرين 3 : سقوط كرية من البلاستيك في الزيت

نطلق رأسيًا في مخبر مملوء بالزيت انطلاقًا من سطحه الحر كرية من البلاستيك ، قطرها  $d = 1 \text{ cm}$  وكتلتها  $m = 0,52 \text{ g}$  .

1 - أ - بين أن الكرية ستغمر كليًا في الزيت حيث الكتلة الحجمية لهذا الأخير  $\rho_h = 900 \text{ kg / m}^3$  .

نعطي تعبير حجم كرية شعاعها  $r$  :  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

ب - أوجد القوى المطبقة على الكرية خلال سقوطها وحددا مميزاتها .

2 - تعبير قوة الاحتكاك المائع المطبقة على الكرية خلال سقوطها الرأسي في الزيت هو :  $f = k \times v$  بحيث أن  $v$  السرعة

اللحظية و k معامل تعبيره  $k = 3\pi \eta \times d$  ، حيث  $\eta = 80 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$  ويمثل لزوجة الزيت .

2 - 1 أثبت أن تعبير المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة  $v$  خلال حركة الكرية يكتب على الشكل التالي :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \times v = g \left( 1 - \frac{\rho_h}{\rho_p} \right)$$

2 - 2 كيف تعلق أن الكرية تأخذ قيمة حدية خلال سقوطها في الزيت ؟

2 - 3 بين أن حل المعادلة التفاضلية يكتب على الشكل التالي :  $v = A(1 - e^{-Bt})$  تحدد الثابتين A و B

3 - بعد 40ms تبقى قيمة سرعة الكرية  $v_\ell = 30 \text{ mm / s}$

3 - 1 أوجد القوى المطبقة على الكرية في هذه الحالة

3 - 2 ما هي رتبة القدر للزمن المميز لهذه الحركة ؟

#### التمرين 4 استعمال طريقة أولبير

نطلق كرية حجمها  $V$  وكتلتها الحجمية  $\rho$  بدون سرعة بدئية في مائع كتلتها الحجمية  $\rho'$  ( $\rho' < \rho$ )

تعبير متجهة قوة الاحتكاك المائع  $f = k \times v^2$  ، بحيث أن  $v$  سرعة الكرية في المائع خلال حركتها الرأسية في المائع نوجه

المحور الرأسي Oz موجه نحو الأسفل .

1 - حدد منحى حركة الكرية

2 - بين أن المعادلة التفاضلية لحركة الكرية تكتب على الشكل التالي :



## تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسى لجسم صلب

$$\frac{dv}{dt} = \alpha \times v^2 + \beta$$

3 - لحل هذه المعادلة يمكن استعمال طريقة أولير ، ذكر بمبدأ هذه العملية

4 - خلال حصة تجريبية - توصل التلاميذ إلى النتائج التالية :  $\alpha = -3,00\text{m}^{-1}$  و  $\beta = 10,0\text{m/s}^2$  والجدول أسفله

t(s)	0	0,040	0,080	0,120	0,160	0,200	0,240
v(m/s)	0,000	0,400	0,781		1,360	1,538	1,654
a(m/s <sup>2</sup> )	10			6,319	4,448	2,901	1,789

4 - 1 أتمم الجدول أعلاه

4 - 2 ما قيمة السرعة الحدية ؟

### التمرين 5 : السقوط الرأسى لجسم صلب (Bac 2010)

يخضع كل جسم صلب مغموء في مائع إلى دافعة أرخميدس ، وإذا كان هذا الجسم في حركة إزاحة داخل المائع فإنه يخضع كذلك إلى قوة احتكاك مائع . يهدف هذا التمرين إلى دراسة تطور سرعة كرتين (a) و (b) من الزجاج متجانستين ليس لهما نفس الشعاع ، توجدان في حركو إزاحة داخل زيت بسرعة نسبيا صغيرة . معطيات :

الكتلة الحجمية للزجاج :  $\rho = 2600\text{kg/m}^3$  ;

الكتلة الحجمية للزيت :  $\rho_0 = 970\text{kg/m}^3$  ;

لزوجة الزيت :  $\eta = 8,00 \times 10^{-2} \text{N.m}^{-2} \cdot \text{s}$  ;

تسارع الثقالة :  $g = 9,81\text{m/s}^2$  ;

تعبير حجم كرية شعاعها  $r$  :  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  ;

نحزر ، عند اللحظة  $t = 0$  ، الكرتين (a) و (b) عند سطح الزيت الموجود في أنبوب شفاف أسطوانى رأسى .

ارتفاع الزيت في الأنبوب هو  $H = 1,00\text{m}$  . الشكل (1)

1 - دراسة حركة الكرية (a) .

ندرس حركة الكرية في معلم  $(O, \vec{i})$  المرتبط بالأرض . نخضع الكرية أثناء حركتها داخل الزيت إلى :

- دافعة أرخميدس  $\vec{F} = -\rho_0 \cdot V \cdot g \cdot \vec{i}$  ;

- قوة الاحتكاك المائع  $\vec{f} = -6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \cdot \vec{i}$  حيث  $v$  سرعة الكرية ؛

- وزنها  $\vec{P} = m\vec{g}$  .

نرمز للزمن المميز لحركة الكرية (a) ب  $\tau$  ؛ ونعتبر أن سرعة الكرية تبلغ القيمة الحدية  $v_\ell$  بعد تمام المدة الزمنية  $5\tau$  .

1 - 1 أثبت المعادلة التفاضلية  $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$  لحركة الكرية (a) مع تحديد تعبير الثابتين  $C$  و  $\tau$  . احسب  $\tau$  علما أن  $r = 0,25\text{cm}$  .

1 - 2 احسب قيمة السرعة الحدية  $v_\ell$  للكرية (a) .

2 - دراسة مقارنة لحركتي الكرتين (a) و (b)

شعاع الكرية (b) هو  $r' = 2r$

1 - 2 حدد ، معللا جوابك ، الكرية التي ستستغرق أطول مدة زمنية لتبلغ سرعتها الحدية .

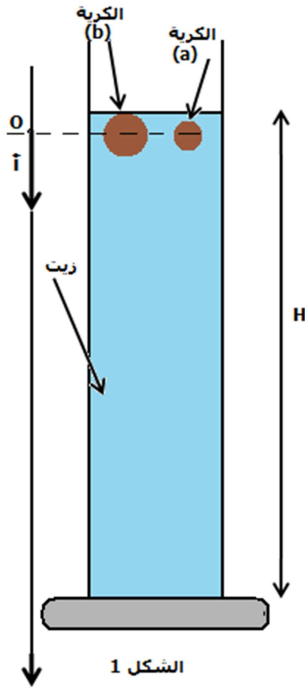
2 - 2 خلال النظام الانتقالي تقطع :

- الكرية (a) المسافة  $d_1 = 5,00\text{cm}$  ؛

- الكرية (b) المسافة  $d_2 = 80\text{cm}$  .

نهمل شعاعي الكرتين  $r$  و  $r'$  أمام ارتفاع الزيت  $H$  .

احسب المدة الزمنية الفاصلة بين وصول الكرتين (a) و (b) إلى قعر الأنبوب .

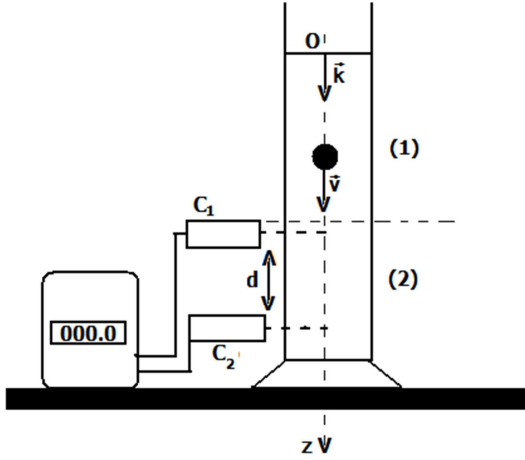


الشكل 1

## تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب

### التمرين 6 ( Bac 2008 )

بهدف هذا التمرين إلى نمذجة قوة الاحتكاك المائع المطبقة من طرف الغليسيرول على جسم صلب وذلك بدراسة حركة السقوط الرأسي لكلمة فليزية كتلتها  $m$  وشعاعها  $r$  داخل الغليسيرول .  
معطيات :



– شعاع الكلمة :  $r = 1\text{cm}$  ؛ حجم الكلمة  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

– الكلمة الحجمية :

للفلز الذي تتكون منه الكلمة :  $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3 \text{kg/m}^3$

الغليسيرول :  $\rho_2 = 1,26 \cdot 10^3 \text{kg/m}^3$

– تسارع الثقاله :  $g = 9,81 \text{m/s}^2$

نذكر أن شدة دافعة أرخميدس المطبقة على الكلمة المغمورة كلياً

في الغليسيرول هي :  $F = \rho_2 V g$  .

نمذج قوة الاحتكاك التي تخضع لها الكلمة أثناء السقوط داخل

الغليسيرول بـ  $\vec{f} = -9\pi r^2 n \vec{k}$  حيث  $n$  عدد صحيح و  $v$  سرعة مركز

قصور الكلمة .

عند لحظة نعتبرها أصلاً للتواريخ  $(t_0 = 0)$  ، نحرر الكلمة بدون سرعة بدئية من نقطة  $O$  أصل المحور الرأسي  $(O, \vec{k})$  الموجه نحو

الأسفل ، فتم حركتها داخل الغليسيرول الموجود في إناء زجاجي ، على مرحلتين :

(1) : مرحلة النظام البدئي بين لحظتين  $t_0$  و  $t_1$  حيث تتزايد سرعة الكلمة .

(2) : مرحلة النظام الدائم انطلاقاً من اللحظة  $t_1$  حيث تأخذ سرعة الكلمة قيمة حدية ثابتة  $v_\ell$  .

يمكن الجهاز المكون من ميقت وخليتين  $(C_1)$  و  $(C_2)$  من قياس المدة الزمنية  $\Delta t$  التي تستغرقها الكلمة لقطع المسافة

$d = 20\text{cm}$  خلال المرحلة (2) أنظر الشكل جانبه

1 – حدد قيمة السرعة الحدية  $v_\ell$  علماً أن  $\Delta t = 956\text{ms}$  .

2 – بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أن المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة  $v$  لمركز قصور الكلمة داخل السائل تكتب

على الشكل :

$$B = g \left( \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \right) \text{ و } A = \frac{27}{4\rho_1 r^2} \text{ مع } \frac{dv}{dt} + Av^n = B$$

3 – أوجد انطلاقاً من المعادلة التفاضلية ، تعبير  $v_\ell^n$  بدلالة  $g, r, \rho_1, \rho_2$  .

4 – استنتج العدد  $n$  .

## VI - السقوط الرأسي الحر .

### 1 - تعريف

السقوط الحر لجسم صلب هو حركة مركز القصور هذا الجسم في مرجع أرضي عندما يخضع الجسم لقوة الثقالة فقط . نظريا يكون السقوط حرا إذا تم في الفراغ ، ويمكن اعتبار سقوط جسم في الهواء حرا إذا كانت كثافته عالية وشكله انسيابي ، ومنطقة سقوطه محدودة في مجال الثقالة .

2 - متجهة التسارع  $a_G$  لمركز القصور .

نعتبر السقوط الحر لجسم صلب في مجال الثقالة وفي مرجع أرضي . أي أن الجسم يوجد تأثير وزنه فقط .

نطبق القانون الثاني لنيوتن :  $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \vec{a}_G$  أي أن  $\vec{g} = \vec{a}_G$

3 - المعادلة الزمنية للحركة

في المعلم  $(O, \vec{k})$  الموجه نحو الأسفل نسقط العلاقة فنحصل على :  $a_z = g \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = g \Rightarrow v_z = gt + C$  نحدد الثابتة C بالشروط

البديئية . نأخذ عند اللحظة  $t_0=0$  أن  $v_G(t=0) = v_0 = 0$  أي أن  $v_z = gt$  ونستنتج أن سرعة G دالة زمنية خطية .

بنفس الطريقة نبحث عن  $z(t)$  :

نحدد كذلك الثابتة C' بالشروط البديئية . نأخذ عند اللحظة  $t=0$  أن  $z(0)=z_0=0$  وبالتالي فإن

$C'=0$  أي أن المعادلة الزمنية لحركة السقوط الحر للجسم الصلب بدون سرعة بدئية ومن النقطة O تم اختيارها كأصل معلم

الزمن هي :  $z(t) = \frac{1}{2}gt^2$  .

وهذه المعادلة نعممها بالنسبة لجميع الأجسام الصلبة التي تطلق بدون سرعة بدئية في سقوط حر أي أنها تسقط بنفس الحركة ، **حركة مستقيمة متغيرة بانتظام** .

### التمرين 1 :

I - تسقط كرة رأسيا بدون سرعة بدئية . نعتبر السقوط حرا ونقوم بدراسته في معلم متعامد وممنظم  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  محوره

$(O, \vec{k})$  رأسي وموجه نحو الأسفل .

1 - ما طبيعة مسار G مركز قصور الكرة ؟

2 - أوجد القوى المطبقة على الكرة أثناء سقوطها . ما القوى التي نهملها أمام وزن الجسم ؟ وما هي الشروط لكي نقوم بهذا الإهمال ؟

3 - عبر بدلالة الزمن t عن الأنسوب z للنقطة G .

4 - أحسب السرعة التي ستصل بها الكرة إلى الأرض . نعطي  $h=2m$  .

II - السرعة البديئية في اللحظة  $t=0$  لمركز قصور الكرة أرسلت رأسيا نحو الأعلى تساوي  $v_0=15,0m/s$

1 - اعط تعبير الإحداثية v لمتجهة السرعة لمركز القصور الكرة لمحور رأسي  $(O, \vec{k})$  موجه نحو الأعلى للمعلم المتعامد والممنظم  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  .

2 - أوجد تعبير  $t_M$  تاريخ اللحظة الموافقة للارتفاع الأقصى  $z_M$  للنقطة G ، واحسب قيمته .

3 - أحسب قيمة  $z_M$  .

### التمرين 2 : تحديد عمق بئر

لتحديد العمق H لبئر ، نسقط رأسيا حجرة من فتحة البئر بدون سرعة بدئية . المدة الزمنية المستغرقة بين لحظة انطلاق

سقوط الحجرة و اللحظة التي سمع فيها اصطدام الحجرة بالقعر البئر هي  $\Delta t = 4,50s$

نعطي سرعة الصوت في الهواء  $V_{son} = 330m/s$  و  $g = 9,80m/s^2$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بين أن تعبير العمق H يكتب على الشكل التالي :

$$H = \frac{V_{son}^2}{g} \left( 1 + \frac{g\Delta t}{V_{son}} - \sqrt{1 + \frac{2g\Delta t}{V_{son}}} \right)$$

أحسب العمق H للبئر .