

بعض تطبيقات قوانين نيوتن

Quelques applications des lois de Newton

الجزء الرابع :
الميكانيك
الوحدة 2
8 س

1- الحركات المستقيمة :

1-1- السقوط الرأسي الحر :

- السقوط الحر لجسم صلب هو حركة مركز قصوره في مرجع أرضي عندما يخضع لوزنه فقط .
ونحصل عليه تجريبيا إذا تم في الفراغ أو في الهواء بالشروط التالية :
- ↑ شكل الجسم انسيابي (f مهملة أمام P) .
- ↑ الكتلة الحجمية للجسم كبيرة مقارنة مع الكتلة الحجمية للهواء (F_A مهملة أمام P) .
- ↑ ارتفاعات السقوط صغيرة (من رتبة المتر) .

1-1-1- المعادلات التفاضلية :

ندرس السقوط الرأسي الحر لجسم صلب (S) كتلته m في معلم متعامد ممنظم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مرتبط بالأرض الذي نعتبره غاليليا .

المجموعة المدروسة : { الجسم (S) } وتتم دراسة الحركة في المعلم (O, \vec{k}) الموجه نحو الأسفل و المرتبط بالأرض الذي نعتبره غاليليا .

جرد القوى : وزنها $\vec{P} = m\vec{g}$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نجد $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{g} = m \cdot \vec{a}_G$ أي $\vec{a}_G = \vec{g}$

- أثناء السقوط الرأسي الحر لجسم صلب ، تكون $\vec{a}_G = \vec{g}$ أي أن متجهة التسارع \vec{a}_G لمركز قصور الجسم لا تتعلق بالكتلة m للجسم الصلب .
- أثناء السقوط الرأسي الحر لجسم صلب في مجال الثقالة المنتظم ، يكون مركز قصوره في حركة مستقيمة متغيرة بانتظام لأن مسارها مستقيمي و تسارعها ثابت $a_G = g = cte$

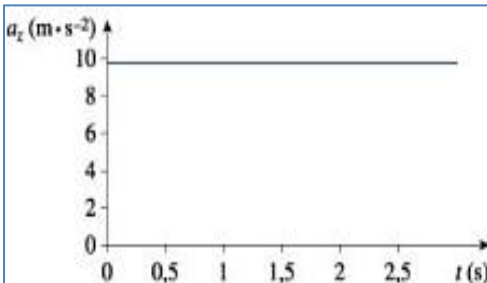
1-1-2- حل المعادلات التفاضلية :

$$\vec{v}_{G0} \begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} \end{cases} \quad \text{و} \quad \vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 \end{cases} : t = 0 \text{ الشروط البدئية عند اللحظة } t = 0$$

نسقط العلاقة المتجهية $\vec{a}_G = \vec{g}$ في المعلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ فنجد

$$\vec{a}_G(t) \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = g \end{cases} \text{ المعادلات الزمنية لمتجهة التسارع .}$$

$$a_G = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |a_z| = g \text{ مع}$$



ونعلم أن $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt}$ إذن : $\frac{d\vec{v}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t) = g \end{cases}$ وهي تمثل المعادلات التفاضلية للحركة .

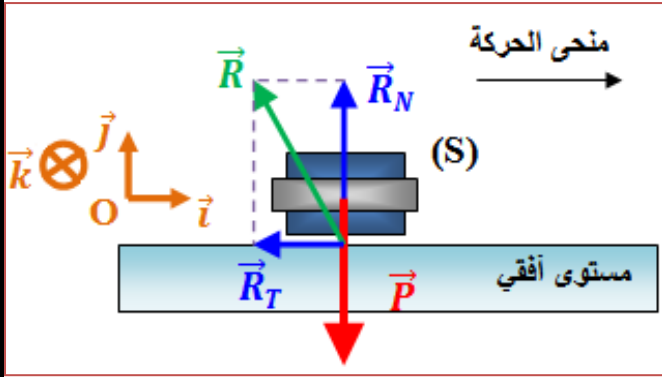
و بعملية التكامل نحصل على : $\vec{v}_G(t) \begin{cases} v_x(t) = C_1 = v_{0x} = 0 \\ v_y(t) = C_2 = v_{0y} = 0 \\ v_z(t) = g \cdot t + C_3 = g \cdot t + v_{0z} \end{cases}$ وهي تمثل المعادلات الزمنية لمتجهة السرعة .

$$v_G = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = |v_z|$$

ونعلم أن $\vec{v}_G(t) = \frac{d\vec{OG}}{dt}$ إذن : $\frac{d\vec{OG}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(t) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = v_y(t) = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v_z(t) = g \cdot t + v_{0z} \end{cases}$

وبعملية التكامل نحصل على : $\vec{OG}(t) \begin{cases} x(t) = C_4 = x_0 = 0 \\ y(t) = C_5 = y_0 = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_{0z} \cdot t + C_6 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_{0z} \cdot t + z_0 \end{cases}$ وهي تمثل المعادلات الزمنية لمتجهة الموضع .

تطبيق	بدون سرعة بدئية	بسرعة بدئية نحو الاعلى	بسرعة بدئية نحو الأسفل
الشروط البدئية المحور (oz) نحو الأسفل	$\vec{v}_{G0} \begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} < 0 \end{cases}$ و $\vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$	$\vec{v}_{G0} \begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} < 0 \end{cases}$ و $\vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$	$\vec{v}_{G0} \begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} > 0 \end{cases}$ و $\vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$
المعادلات التفاضلية للحركة	$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t) = g \end{cases}$	$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t) = g \end{cases}$	$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t) = g \end{cases}$
المعادلات الزمنية لمتجهة السرعة	$\vec{v}_G(t) \begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = g \cdot t + v_{0z} \end{cases}$	$\vec{v}_G(t) \begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = g \cdot t + v_{0z} \end{cases}$	$\vec{v}_G(t) \begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = g \cdot t \end{cases}$
المنحنى $V = f(t)$			
المعادلات الزمنية لمتجهة الموضع	$\vec{OG}(t) \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_{0z} \cdot t \end{cases}$	$\vec{OG}(t) \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_{0z} \cdot t \end{cases}$	$\vec{OG}(t) \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$
المنحنى $z = f(t)$			
طبيعة الحركة	مستقيمة متسارعة بانتظام	مستقيمة متغيرة بانتظام	مستقيمة متسارعة بانتظام



2-1- حركة جسم صلب على مستوى أفقي :

في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ، نرسل جسما صلبا (S) كتلته m فوق مستوى أفقي بسرعة بدئية أفقية \vec{v}_0 . نعتبر قوة الاحتكاك ثابتة أي $\vec{f} = \vec{R}_T = cte$.

1-2-1- المعادلات التفاضلية :

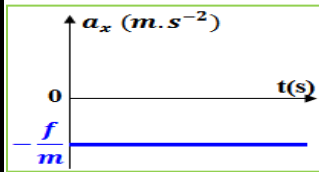
المجموعة المدروسة : { الجسم (S) } وتتم دراسة الحركة في المعلم المتعامد الممنظم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المرتبط بالأرض الذي نعتبره غاليليا .
جهد القوى : وزنها \vec{P} وتأثير السطح \vec{R} .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نجد $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$

$$\vec{R} \begin{cases} R_x = -R_T = -f \\ R_y = R_N \\ R_z = 0 \end{cases} \quad \vec{P} \begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \\ P_z = 0 \end{cases} \quad \text{في المعلم } \mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ لدينا :}$$

$$. \quad \vec{a}_G(t) \begin{cases} a_x(t) \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = 0 \end{cases} \quad (a_y = a_z = 0 \text{ لأن حركة (S) مستقيمة وفق (ox)) .$$

$$\begin{cases} ma_x = -f \\ ma_y = -mg + R_N = 0 \\ ma_z = 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} P_x + R_x = ma_x \\ P_y + R_y = ma_y \\ P_z + R_z = ma_z \end{cases} \quad \text{فنجهد } \mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$



$$\vec{a}_G(t) \begin{cases} a_x(t) = -\frac{f}{m} \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{وبالتالي المعادلات التفاضلية للحركة هي :}$$

وبما أن المسار مستقيمي والتسارع ثابت $a_G = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |a_x| = \frac{f}{m}$ فإن الجسم في حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

2-2-1- حل المعادلات التفاضلية :

$$\vec{v}_{G0} \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{الشروط البدئية عند اللحظة } t = 0$$

$$\text{ونعلم أن } \vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ إذن :} \quad \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) = -\frac{f}{m} \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{وهي تمثل المعادلات التفاضلية للحركة .}$$

$$\vec{v}_G(t) \begin{cases} v_x(t) = -\frac{f}{m}t + C_1 = -\frac{f}{m}t + v_{0x} = -\frac{f}{m}t + v_0 \\ v_y(t) = C_2 = v_{0y} = 0 \\ v_z(t) = C_3 = v_{0z} = 0 \end{cases} \quad \text{و بعملية التكامل نحصل على :}$$

$$v_G = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = |v_x|$$

وهي تمثل المعادلات الزمنية لمتجهة السرعة . مع

$$\frac{d\vec{OG}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(t) = -\frac{f}{m}t + v_0 \\ \frac{dy}{dt} = v_y(t) = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v_z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{و نعلم أن } \vec{v}_G(t) = \frac{d\vec{OG}}{dt} \quad \text{إذن :}$$

$$\vec{OG}(t) \begin{cases} x(t) = -\frac{f}{2m}t^2 + v_0t + C_4 = -\frac{f}{2m}t^2 + v_0t + x_0 \\ y(t) = C_5 = y_0 = 0 \\ z(t) = C_6 = z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{وبعملية التكامل نحصل على :}$$

وهي تمثل المعادلات الزمنية لمتجهة الموضع .

حالة الاحتكاكات المهملة :

بنفس الطريقة وفي نفس الشروط البدئية ، نجد :

$$\vec{OG}(t) \begin{cases} x(t) = v_0t + x_0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{و } \vec{v}_G(t) \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{و } \vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt} \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z = 0 \end{cases}$$

1-3-1 حركة جسم صلب على مستوى مائل :

في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ ، نحرر جسما صلبا (S) كتلته m فوق مستوى مائل بزاوية α بدون سرعة بدئية . نعتبر قوة الاحتكاك ثابتة أي $\vec{f} = \vec{R}_T = cte$

1-3-1-1 المعادلات التفاضلية :

المجموعة المدروسة : { الجسم (S) } وتتم دراسة

الحركة في المعلم المتعامد المنظم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

المرتبط بالأرض الذي نعتبره غاليليا .

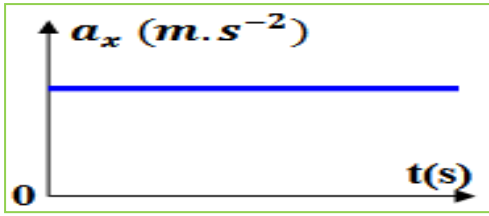
جهد القوى : وزنها \vec{P} وتأثير السطح \vec{R} .
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نجد $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$

$$\vec{R} \begin{cases} R_x = -R_T = -f \\ R_y = R_N \\ R_z = 0 \end{cases} \quad \vec{P} \begin{cases} P_x = mg \sin \alpha \\ P_y = -mg \cos \alpha \\ P_z = 0 \end{cases} \quad \text{في المعلم } \mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ لدينا :}$$

$$\vec{a}_G(t) \begin{cases} a_x(t) \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = 0 \end{cases} \quad (a_y = a_z = 0 \text{ لأن حركة (S) مستقيمة وفق (ox)) .$$

$$\text{نسقط العلاقة المتجهية في } \mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ فنجد أي } \begin{cases} P_x + R_x = ma_x \\ P_y + R_y = ma_y \\ P_z + R_z = ma_z \end{cases}$$

$$\text{وبالتالي المعادلات التفاضلية للحركة هي : } \begin{cases} ma_x = mg \sin \alpha - f \\ ma_y = R_N - mg \cos \alpha = 0 \\ ma_z = 0 \end{cases}$$



$$\vec{a}_G(t) \begin{cases} a_x(t) = g \sin \alpha - \frac{f}{m} \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$$

وبما أن المسار مستقيمي والتسارع ثابت $a_G = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |a_x| = g \sin \alpha - \frac{f}{m}$ فإن الجسم في حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

1-3-2- حل المعادلات التفاضلية :

$$\vec{v}_{G0} \begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} : t = 0 \text{ الشروط البدئية عند اللحظة}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) = g \sin \alpha - \frac{f}{m} \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{ونعلم أن } \vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ إذن :}$$

التفاضلية للحركة .

$$\vec{v}_G(t) \begin{cases} v_x(t) = \left(g \sin \alpha - \frac{f}{m}\right) t + C_1 = \left(g \sin \alpha - \frac{f}{m}\right) t \\ v_y(t) = C_2 = v_{0y} = 0 \\ v_z(t) = C_3 = v_{0z} = 0 \end{cases} \quad \text{و بعملية التكامل نحصل على :}$$

$$\vec{v}_G = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = |v_x|$$

وهي تمثل المعادلات الزمنية لمتجهة السرعة .

$$\frac{d\vec{OG}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(t) = \left(g \sin \alpha - \frac{f}{m}\right) t \\ \frac{dy}{dt} = v_y(t) = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v_z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{ونعلم أن } \vec{v}_G(t) = \frac{d\vec{OG}}{dt} \text{ إذن :}$$

$$\vec{OG}(t) \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \left(g \sin \alpha - \frac{f}{m}\right) t^2 + C_4 = \frac{1}{2} \left(g \sin \alpha - \frac{f}{m}\right) t^2 \\ y(t) = C_5 = y_0 = 0 \\ z(t) = C_6 = z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{وبعملية التكامل نحصل على :}$$

وهي تمثل المعادلات الزمنية لمتجهة الموضع .

⚡ حالة الاحتكاكات المهملة :

بنفس الطريقة وفي نفس الشروط البدئية ، نجد :

$$\vec{OG}(t) \begin{cases} x = \frac{1}{2} (g \sin \alpha) t^2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \vec{v}_G(t) \begin{cases} v_x = (g \sin \alpha) t \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \vec{a}_G \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x = g \sin \alpha \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z = 0 \end{cases}$$