



الثانية باكالوريا  
الفيزياء

# التذبذبات الحرة في دارة $RLC$ متوالية

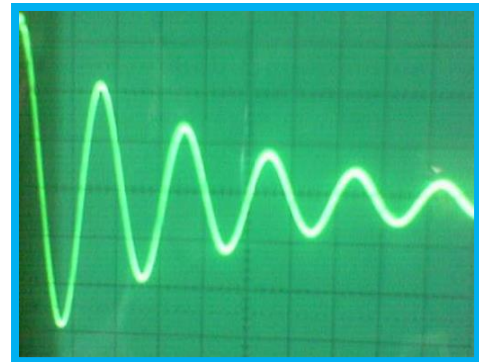
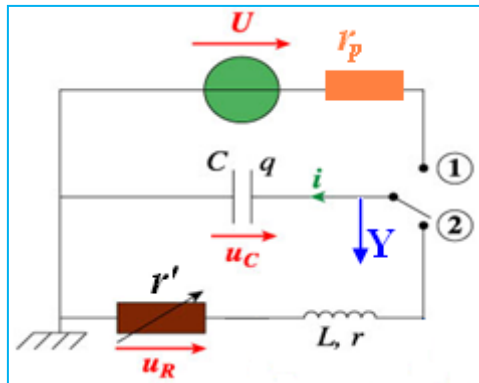
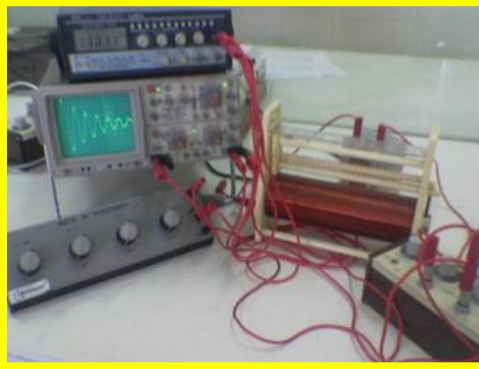
## Les oscillations libres dans un circuit $RLC$ série

الجزء الثالث :

الكهرباء

الوحدة 3

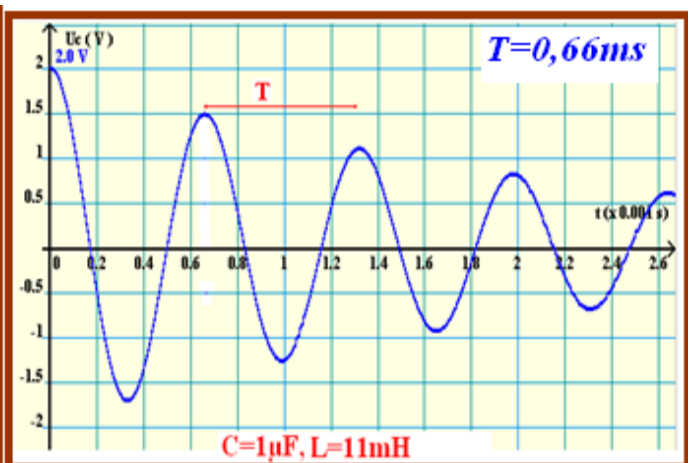
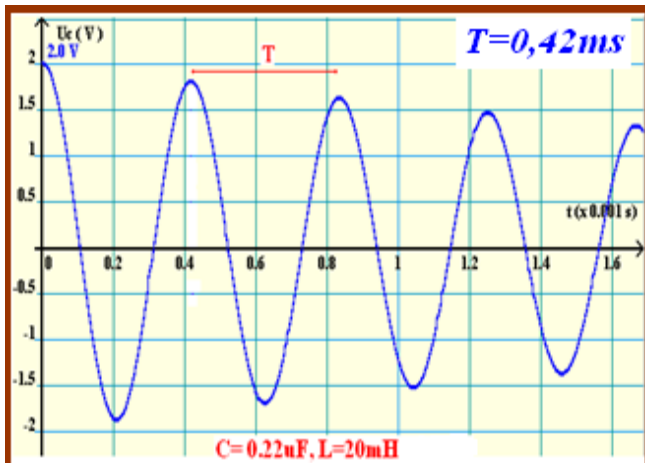
8 س



### 1- تفريغ مكثف في وشيعة :

#### 1-1- الدراسة التجريبية :

- ننجز التركيب التجريبي الممثل جانبه .  
 نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع 1 لمدة زمنية كافية .  
 نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع 2 فنحصل على دارة  $RLC$  متوالية .  
 نعاين التوتر  $u_C(t)$  بين مربطي المكثف .  
 نعيد التجربة عدة مرات برفع قيمة المقاومة  $r'$  .  
 أ- لماذا نؤرجح أولا قاطع التيار إلى الموضع 1 ؟  
 نؤرجح أولا قاطع التيار إلى الموضع 1 لشحن المكثف .  
 ب- ما الظاهرة التي تحدث عندما نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع 2 ؟  
 تحدث ظاهرة تفريغ المكثف في الوشيعة .  
 ج- كيف يتغير وسع وإشارة التوتر  $u_C(t)$  ؟ هل  $u_C(t)$  دالة دورية ؟  
 يتناقص وسع التوتر  $u_C(t)$  مع الزمن وهو متناوب نقول إنه تذبذبي مخمد .  
 $u_C(t)$  ليست دالة دورية .  
 د- نسمي شبه الدور  $T$  المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليتين للتوتر  $u_C(t)$  . عين مبيانيا  $T$  .  
 مبيانيا نجد  $T = 0,3 \text{ ms}$  .  
 ه- ما تأثير المقاومة  $R$  على وسع التذبذبات وشبه الدور  $T$  ؟  
 تزايد المقاومة  $R$  يتناسب مع تناقص  $u_C(t)$  .  
 تغير المقاومة  $R$  لا يؤثر في شبه الدور  $T$  .  
 و- ما تأثير معامل التحريض  $L$  وسعة المكثف  $C$  على شبه الدور  $T$  ؟  
 يتناسب شبه الدور  $T$  مع معامل التحريض  $L$  وسعة المكثف  $C$  .



2-1- أنظمة التذبذبات الحرة لدارة  $RLC$  متوالية :

		<p><b>R=0</b> تذبذبات حرة وغير مخمدة</p>	<p>نظام دوري</p>
		<p><b>R صغيرة</b> يتناقص وسع التوتر مع <math>u_C(t)</math> الزمن</p>	<p>نظام شبه دوري</p>
		<p><b>R كبيرة</b> <math>R = \sqrt{\frac{L}{C}}</math></p>	<p>نظام حرج</p>
		<p><b>R كبيرة</b> جدا تزال التذبذبات لوجود خمود مهم</p>	<p>نظام لا دوري</p>

يؤدي تفريغ مكثف مشحون ، في وشيعة دارة  $RLC$  متوالية ، إلى ظهور تذبذبات حرة ( لعدم تزويد الدارة  $RLC$  بالطاقة بعد اللحظة البدئية ) و مخمدة ( يتناقص وسع التوتر  $u_C(t)$  مع الزمن ) .  
نقول إن الدارة  $RLC$  المتوالية تكون متذبذبا كهربائيا حرا و مخمدا .

حسب قيمة  $R$  مقاومة الدارة  $RLC$  ، نميز أنظمة التذبذبات : **نظام دوري - نظام شبه دوري - نظام حرج - نظام لا دوري .**

**شبه الدور  $T$**  المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليتين للتوتر  $u_C(t)$  .  
لا يتعلق **شبه الدور  $T$**  بالمقاومة  $R$  ، ولكن يتعلق **بمعامل التحريض  $L$**  و **سعة المكثف  $C$**  .

### 1-3- التفسير الطاقى :

	<p><b>نظام دوري</b></p> <p>تتحفظ الطاقة الكلية للدارة لأن مقاومة الدارة منعدمة وكذلك الطاقة المبددة بمفعول جول</p>	<p><b>نظام دوري</b></p>
<p>الطاقات</p> <p>الطاقة المخزونة في المكثف: <math>E_C</math></p> <p>الطاقة المخزونة في الوشيعه: <math>E_m</math></p> <p>الطاقة الكلية في الدارة RLC: <math>E_t</math></p>	<p>تكون الطاقة <math>E_e</math> المخزونة في المكثف قصوى عندما تكون الطاقة <math>E_m</math> المخزونة في الوشيعه منعدمة والعكس .</p> <p>تتناقص الطاقة <math>E_e</math> عندما تترزايد الطاقة <math>E_m</math> والعكس مما يدل على أن الطاقة <math>E_e</math> تتحول إلى الطاقة <math>E_m</math> والعكس .</p> <p>تتناقص الطاقة الكلية <math>E</math> مع مرور الزمن نتيجة تبديد جزء منها بمفعول جول عند كل تبادل طاقي بين المكثف والوشيعه .</p> <p>تغيرات الطاقة <math>E_e</math> و <math>E_m</math> شبه دورية وشبه دورها يساوي نصف شبه دور التوتر <math>u_C</math> .</p>	<p><b>نظام شبه دوري</b></p>
	<p>تتناقص الطاقة <math>E_e</math> بمفعول جول إلى أن تنعدم .</p> <p>تتحول الطاقة <math>E_e</math> إلى الطاقة <math>E_m</math> والعكس غير صحيح .</p>	<p><b>نظام لا دوري</b></p>

### 1-4- المعادلة التفاضلية لدائرة RLC متوالية :

لدينا حسب قانون إضافية التوترات :  $u_R + u_L + u_C = 0$

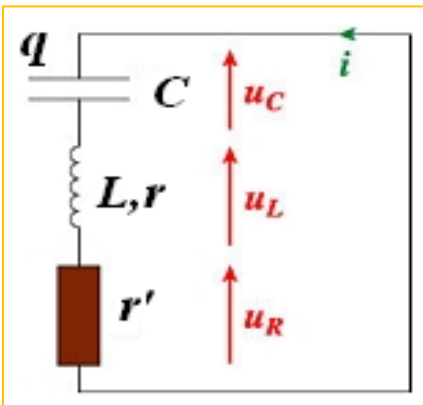
وحسب قانون أوم :  $u_R = r' \cdot i$  ولدينا  $u_L(t) = r \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$

ولدينا حسب توجيه الدارة  $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

وبالتالي  $u_R = r' \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt}$  و  $u_L(t) = rC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2u_C}{dt^2}$

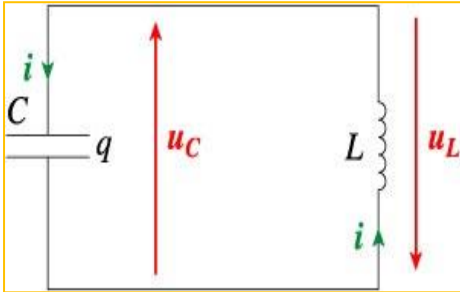
إذن  $r' \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + rC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$

نضع  $R = r + r'$  إذن  $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$



المعادلة التفاضلية لدارة RLC متوالية التي يحققها التوتر  $u_C(t)$  بين مربطي المكثف هي :  
 يعبر المقدار  $\frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt}$  عن ظاهرة خمود الذبذبات .  
 $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$

نعلم أن  $u_C = \frac{q}{C}$  إذن ، المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة  $q$  هي :  $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$



## 2- الدراسة التحليلية لدارة مثالية LC :

### 1-2- المعادلة التفاضلية :

نصل مربطي مكثف سعته  $C$  مشحون بدنيا ، بوشيجة معامل تحريضها الذاتي  $L$  ومقاومتها الداخلية مهملة .

لدينا حسب قانون إضافية التوترات :  $u_L + u_C = 0$

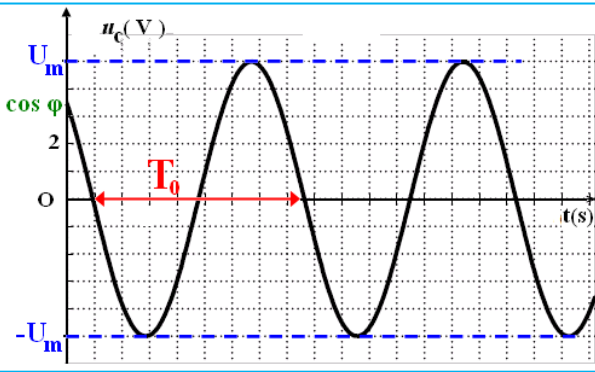
ولدينا حسب توجيه الدارة  $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

ولدينا  $u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$  وبالتالي  $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$

المعادلة التفاضلية لدارة LC مثالية التي يحققها التوتر  $u_C(t)$  بين مربطي المكثف هي :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

نعلم أن  $u_C = \frac{q}{C}$  إذن ، المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة  $q$  هي :  $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$



### 2-2- حل المعادلة التفاضلية :

يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

$U_m$  وسع الذبذبات (الوسع القصوي للتوتر  $u_C$ ) ووحدته  $V$

$T_0$  الدور الخاص للذبذبات مع  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  النبض الخاص

مع  $N_0 = \frac{1}{T_0}$  التردد الخاص .

$\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi$  الطور عند اللحظة  $t$  .

$\varphi$  الطور البدني ( $t = 0$ ) ويعبر عنها بالراديان ( $rad$ ) ونختار  $-\pi \leq \varphi < \pi$  .  
 يتم تحديد قيم  $U_m$  و  $\varphi$  من خلال الشروط البدنية ( لأن التوتر  $u_C$  و التيار المار في الوشيجة متصلين ) .

لدينا  $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$  أي  $i(t) = -\frac{2\pi}{T_0} C \cdot U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$

ونعلم أن  $i(0) = -\frac{2\pi}{T_0} C U_m \sin(\varphi) = 0$  أي  $\sin(\varphi) = 0$

ومنه :  $\varphi = \pi$  أو  $\varphi = 0$  .

المكثف مشحون بدنيا  $u_C(0) = U_m \cos(\varphi) = E$  أي  $\cos(\varphi) = \frac{E}{U_m} > 0$  إذن  $\varphi = 0$  .

لدينا  $U_m \cos(\varphi) = U_m \cos(0) = E$  إذن  $U_m = E$  . وبالتالي :  $u_C(t) = E \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$

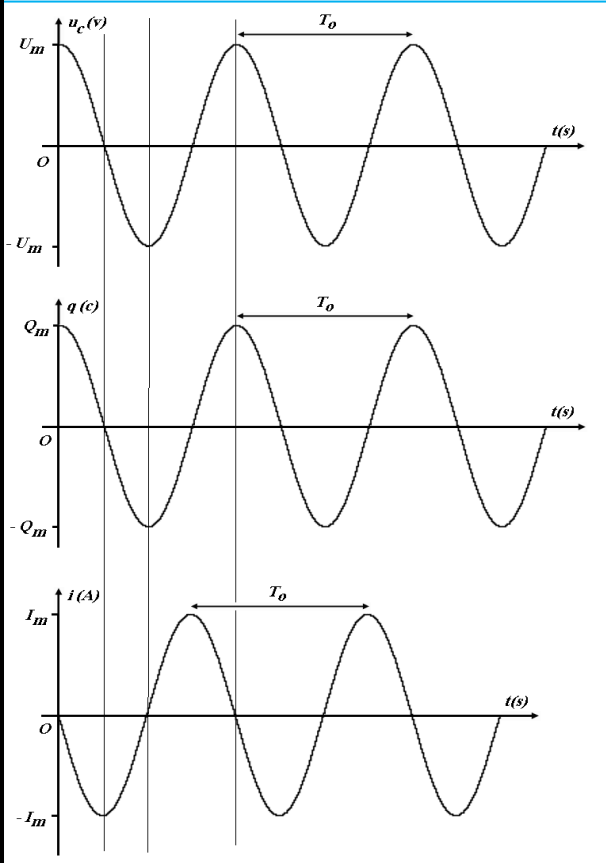
### 2-3- الدور الخاص للتذبذبات :

لدينا  $u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$  أي  $\frac{du_C}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0}U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

ومنه فإن  $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C(t)$  يعني  $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

نعوض في المعادلة التفاضلية :  $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C(t) + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0$  أي  $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C(t) + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0$

تتحقق المعادلة كيفما كانت  $t$  إذا كان  $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC} = 0$  أي  $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$



### ملحوظة :

لدينا  $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$  مع  $C = \frac{i}{\frac{du_C}{dt}}$  و  $L = \frac{u_L}{\frac{di}{dt}}$

أي  $[C] = \frac{[i]}{[u]}$  و  $[L] = \frac{[u]}{[i]}$  إذن  $[T_0] = [\sqrt{L.C}]$

$$[T_0] = [t] \quad \text{أي} \quad [T_0] = \sqrt{\frac{[u]}{[i]} \frac{[i]}{[u]}} = \sqrt{[t^2]} = [t]$$

إذن الدور الخاص  $T_0$  له بعد الزمن ونعبر عنه بالثانية .

شبه الدور  $T$  للتذبذبات في دائرة RLC متوالية مخدمة قليلا يساوي تقريبا الدور الخاص  $T_0$  للمتذبذب غير المخمد .

$$T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$$

### 2-4- تعبير الشحنة q وشدة التيار i :

لدينا  $q = C.u_C$  إذن  $q(t) = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

مع  $Q_m = CU_m$

ولدينا  $i = \frac{dq}{dt}$  إذن  $i(t) = I_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

مع  $I_m = \frac{2\pi}{T_0}Q_m$

الدالتان  $u_C(t)$  و  $i(t)$  جيبيتان وهما على تربع في الطور أي عندما تكون إحداها منعدمة تكون الأخرى قصوى أو دنيا .

### 3- انتقالات الطاقة بين المكثف و الوشيعة :

#### 3-1- الطاقة في الدارة LC المثالية :

الطاقة الكلية المخزونة في الدارة LC في كل لحظة هي

$$E_t = E_e + E_m = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

لدينا حسب قانون إضافية التوترات :  $u_L + u_C = 0$

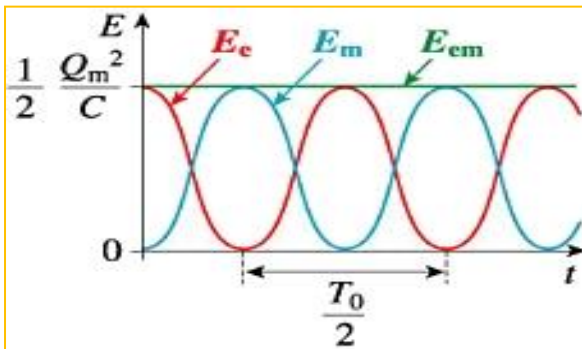
أي  $\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$  نضرب المتساوية في  $\frac{dq}{dt}$

فنجد  $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2\right) = 0$  أي  $\frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = 0$

وبالتالي  $E_t = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2 = cte$

$$-\sin(\omega t) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



⊕ تكون الطاقة الكلية لدارة مثالية LC ثابتة وتساوي الطاقة البدئية المخزونة في المكثف .  
⊕ خلال التذبذبات غير المخمدة ، تتحول الطاقة الكهربائية في المكثف إلى طاقة مغناطيسية في

$$E_t = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} C U_m^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 . \text{ الوشيعية و العكس .}$$

### 2-3- الطاقة في الدارة RLC المتوالية :

الطاقة الكلية المخزونة في الدارة RLC في كل لحظة هي

$$E_t = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2$$

$$\frac{dE_t}{dt} = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + L i \frac{di}{dt} = i \left( \frac{q}{C} + L \frac{d^2 q}{dt^2} \right)$$

$$\text{وباعتبار المعادلة التفاضلية } \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

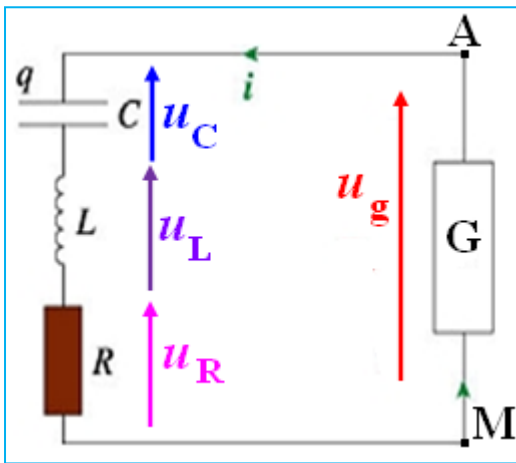
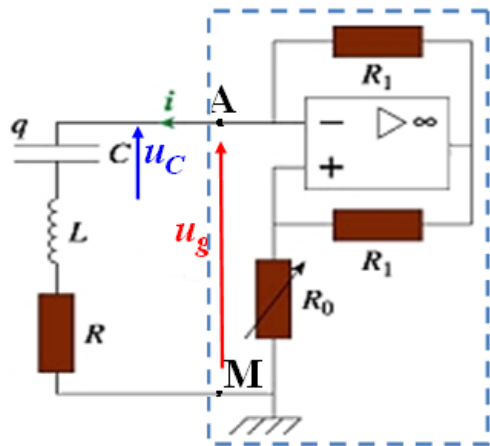
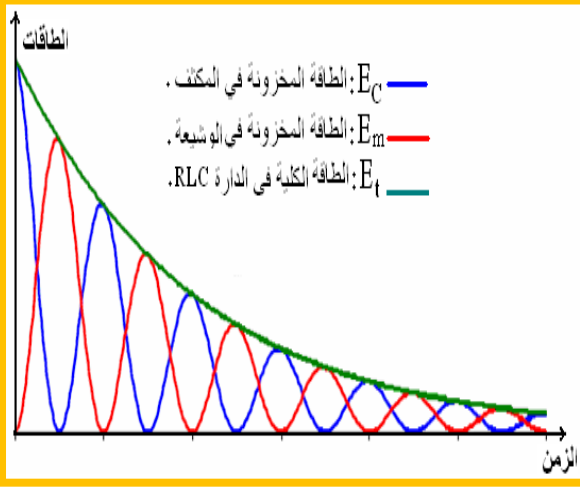
$$\text{فإن } \frac{dE_t}{dt} = -R i^2 \text{ أي } L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = -R \frac{dq}{dt} = -R i$$

وهكذا يتضح أن :

$$\frac{dE_t}{dt} < 0 \text{ تناقصية لأن } E_t \text{ الطاقة الكلية}$$

$$\text{التناقص الطاقى يعزى لوجود المقاومة } R .$$

### تتناقص الطاقة الكلية لدارة RLC متوالية تدريجيا بسبب مفعول جول .



### 4- صيانة التذبذبات :

يمكن صيانة تذبذبات دارة RLC متوالية والحصول على توتر متذبذب ذي وسع ثابت ، باستعمال جهاز يزود الدارة بطاقة تعوض الطاقة المبددة في الدارة بمفعول جول .

جهاز الصيانة عبارة عن مولد يزود الدارة بتوتر  $u_g$  يتناسب اطرادا مع شدة التيار  $i(t)$  .  $u_g = R_0 \cdot i$  وهو يتصرف كمقاومة سالبة .

وهكذا تكون المقاومة الكلية للدارة منعدمة عندما نختار  $R_0 = R$  .

نعتبر التركيب التجريبي التالي حيث المولد G يمثل جهاز الصيانة .

القدرة المبددة بمفعول جول في الدارة RLC هي  $P_{th} = R \cdot i^2$  .

القدرة التي يمنحها المولد G هي  $P_g = u_g \cdot i$  .

ليعوض المولد القدرة المبددة بمفعول جول يجب أن يكون

$$P_{th} = P_g \text{ وبالتالي } u_g = R \cdot i$$

$$\text{نطبق قانون إضافية التوترات فنجد } u_R + u_L + u_C = u_g$$

$$\text{أي } R \cdot i + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = R \cdot i$$

$$\text{إذن } LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية لدارة LC مثالية أي أن التذبذبات جيبية ذات وسع ثابت دورها

$$T_0 = 2\pi\sqrt{L \cdot C}$$