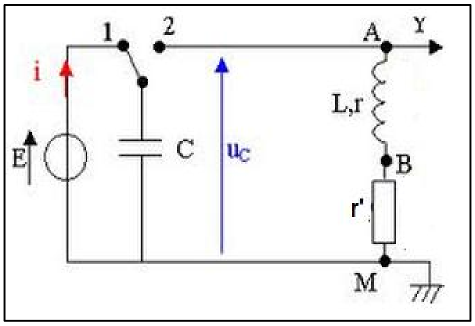
# التذبذبات الحرة في دراة RLC متوالية

## I-تفريغ مكثف في وشيعة :

### 1-الدراسة التجريبية :



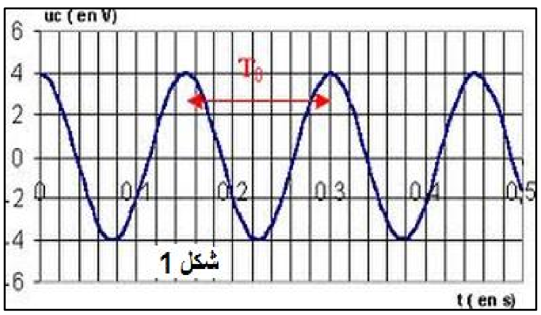

ننجز التركيب التجريبي الممثل في الشكل جانبه والمتكون من مولد توتر مستمر قابل للضبط ، مكثف ، وشيعة و موصل أومي مقاومتها r′ قابلة للضبط .

نضع في البداية $r' = 0$ ونؤرجح قاطع التيار الى الموضع 1 وننتظر الوقت الكافي لشحن المكثف تحت التوتر E .

نؤرجح قاطع التيار الى الموضع 2 فنحصل على دارة RLC متوالية مقاومتها الكلية $R = r + r'$ .

نعاين على شاشة راسم التذبذب التوتر بين مربطي المكثف خلال التفريغ .

### 2-أنظمة التذبذبات الحرة :




حسب قيمة المقاومة $R$ يوجد ثلاث أنظمة :

- نظام دوري :

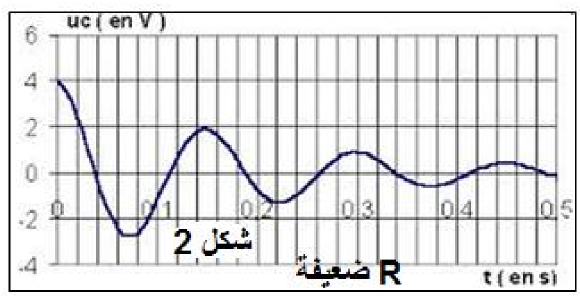
عندما تكون مقاومة الدارة منعدمة ، تكون التذبذبات حرة وغير مخمدة الشكل1

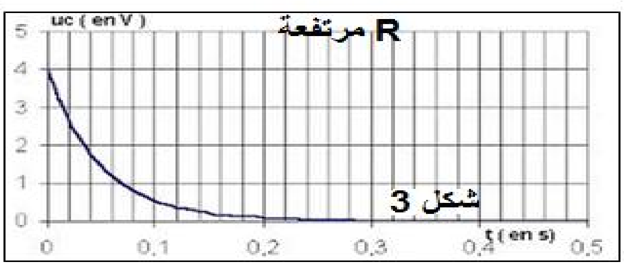
- نظام شبه دوري :

يكون تفريغ المكثف مصحوبا بتذبذبات حرة ومخمدة : وسعها يتناقص مع الزمن . يتعلق الامر بنظام شبه دروي الشكل 2 .

- نظام لا دوري :

يكون تفريغ المكثف بدون تذبذب ، ينعدم التوتر تدريجيا بدون تغير في الاشارة . يتعلق الأمر بنظام لا دوري الشكل 3




### ملاحظة وتفسير :

-مع تزايد المقاوة R تزداد ظاهرة الخمود .

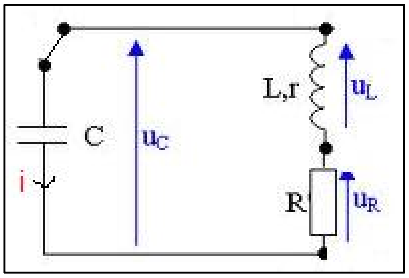
-وسع التذبذبات $u_C(t)$ يتناقص خلال الزمن نقول إن التذبذبات مخمدة كما أن التوتر $u_C(t)$ متناوب لكن ليس بدالة دوية نقول إن التذبذبات شبه دورية تتميز بشبه الدور T .

-التذبذبات تتم دون أن نزود الدارة RLC بالطاقة نقول إن التذبذبات حرة .

**ملحوظة :**

النظام الحرج يفصل بين النظام شبه الدوري و اللادوري ، نحصل عليه عندما تكون للدارة أصغر قيمة للمقاومة تمكن من الحصول على $u_C(t) > 0$ .

### 3-المعادلة التفاضلية لداة RLC متوالية :




قانون إضافية التوترات :

$$u_L + u_R + u_C = 0$$
$$L\frac{di}{dt} + ri + Ri + u_C = 0$$

نعلم أن: $i = \frac{dq}{dt}$ و $q = C.u_C$ وبالتالي : $i = C\frac{du_C}{dt}$

و $\frac{di}{dt} = C\frac{d^2u_C}{dt^2}$

نحصل على :

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R+r)\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

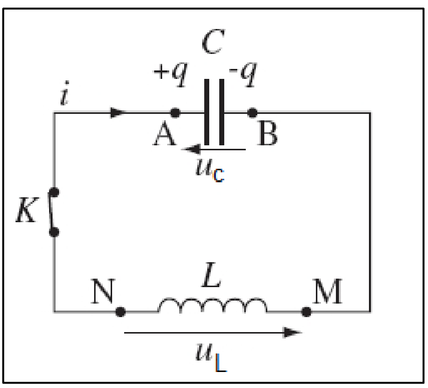
نضع : $R_t = R + r$

المعادلة التفاضلية لدارة RLC:

$$\boldsymbol{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R_t}{L}.\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}.u_C = 0}$$

المقدار المسؤول عن الخمود هو $\frac{R_t}{L}.\frac{du_C}{dt}$

## II-الدراسة النظرية لدارة المثالية LC :




### 1-المعادلة التفاضلية للدارة المثالية LC :

#### 1.1-تعريف

نسمي الدارة المكونة من مكثف سعته C ووشيعة معامل تحريضها L مقاومتها منعدمة بالدارة المثالية.

حيث تكون التذبذبات الكهربائية الحرة الغير مخمدة لدارة مثالية LC جيبية .

#### 1.2-المعادلة التفضلية :

حسب قانون إضافية التوترات :

$$u_L + u_C = 0$$
$$L\frac{di}{dt} + u_C = 0$$
$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C$ لدارة مثالية .

$$\boldsymbol{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.u_C = 0 \qquad (1)}$$

#### 1.3-حل المعادلة التفاضلية :

حل المعالدة التفاضلية (1) يكتب على الشكل $\boldsymbol{u_C(t) = U_m(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)}$

حيث :

$U_m$ : وسع التذبذبات ب (V)

$T_0$ : الدور الخاص ب (s)

$\varphi$ : الطور عند أصل التواريخ (t=0) ب (rad)

$(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ الطو عند الحظة t ب (rad)

المقادير $U_m$ و $\varphi$ تحدد باسستعمال الشوط البدئية : $u_C(0)$ و $i(0)$ .
يمكن كتابة حل المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$u_C(t) = U_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$ حيث : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \leftarrow$ النبض الخاص $(rad.s^{-1})$

2-تعبير الدور الخاص :

لدينا :

$$\begin{cases} u_C(t) = U_m\cos(\omega_0 t + \varphi \\ \dfrac{du_C}{dt} = -U_m.\omega_0 sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \dfrac{d^2u_C}{dt^2} = -U_m.\omega_0^2 sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2.u_C(t) \end{cases}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.u_C = 0 \Rightarrow -\omega_0^2.u_C + \frac{1}{LC}.u_C = 0 \ \Rightarrow u_C\left(-\omega_0^2 + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

$$-\omega_0^2 + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \ \Rightarrow$$

النبض الخاص **:**

$$\boldsymbol{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}}$$

لدينا **:** $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

الدور الخاص :

$$\boldsymbol{T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}}$$

## تطبيق :

1-بين أن ل$\boldsymbol{T_0}$ بعد زمني .

2-حدد $\boldsymbol{U_m}$ و $\boldsymbol{\varphi}$ عند t=0 .

## الحل :

1-معادلة الأبعاد :

$$[T]\sqrt{[L][C]}$$

نعلم أن:

$$\begin{cases} [L] = \dfrac{[U][t]}{[I]} \\ [C] = \dfrac{[I][t]}{[U]} \end{cases} \Rightarrow [T] = \sqrt{\frac{[U][t]}{[I]}.\frac{[I][t]}{[U]}} \ \Rightarrow [T] = [t]$$

نستنتج أن ل $\boldsymbol{T_0}$ بعد زمني.

2-تحديد $U_m$ و $\varphi$ .

لدينا :

$$\begin{cases} u_C(t) = U_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \\ i(t) = C\frac{du_C}{dt} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)CU_m sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \end{cases}$$

حسب الشروط البدئية : $u_C(0) = E$ و $i(0) = 0$

$$\begin{cases} u_C(0) = U_m cos\varphi = E \\ i(o) = -\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)CU_m sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\varphi = \dfrac{E}{U_m} > 0 \\ sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\varphi = \dfrac{E}{U_m} > 0 \\ \varphi = 0 \ \text{أو} \ \varphi = \pi \end{cases}$$

الحل الانسب هو $\varphi = 0$ لان $cos\varphi > 0$ ومنه $\frac{E}{U_m} = 1$ أي : $U_m = E$

نكتب : $\boldsymbol{u_C(t) = E.cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)}$

### 3-تعبير الشحنة q وشدة التيار الكهربائي :

لدينا $q(t) = Cu_C(t)$ وبالتالي : $q(t) = CU_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

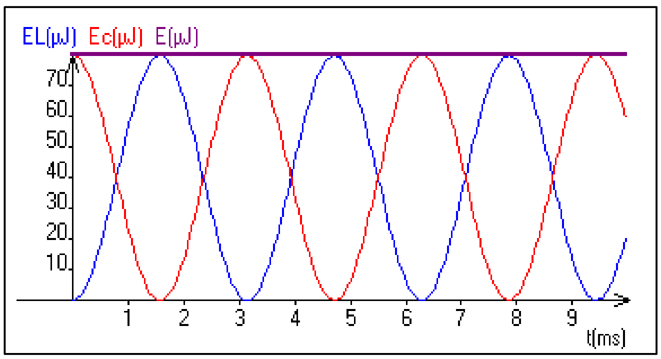
$$\boldsymbol{q(t) = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)}$$

$$i(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)CU_m sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)CU_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i(t) = I_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

مع $I_m = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)CU_m$

## III-انتقال الطاقة بين المكثف والوشيعة :




### 1-تعبير الطاقة الكلية للدارة المثالية LC :

-تكون الطاقة الكلية في دارة مثالية ثابتة وتساوي الطاقة البدئية المخزونة في المكثف .

-خلال التذبذبات غير المخمدة يحدث تبادل طاقي بين المكثف والوشيعة حيث تتحول الطاقة الكهربائية في المكثف الى طاقة مغنطيسية في الوشيعة أو العكس دون تبدد في الطاقة.

-الطاقة الكلية في دارة مثالية LC هي مجموع الطاقة الكهربائية للمكثف والطاقة المغنطيسية للوشيعة :

$$E_T = E_e + E_m = \frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{1}{2}Li^2$$

لدينا $u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ و $i(t) = -CU_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ و $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC}$

$$E_T = \frac{1}{2}C\left[U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right]^2 + \frac{1}{2}L\left[-CU_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right]^2$$

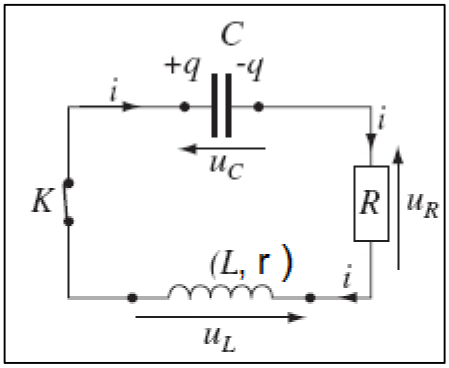
$$E_T = \frac{1}{2}CU_m^2\left[cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) + LC\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right]$$

$$E_T = \frac{1}{2}CU_m^2\left[cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) + LC.\frac{1}{LC}sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right]$$

$$E_T = \frac{1}{2}CU_m^2\left[cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) + sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right]$$

$\boldsymbol{E_T = \frac{1}{2}CU_m^2 = Cte}$ إذن الطاقة الكلية تنحفظ .

## 2-طاقة الدارة المتوالية RLC:




حسب قانون إضافية التوترات : $u_L + u_R + u_C = 0$

أي : $L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \Leftarrow \quad L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = -Ri \quad (1)$

الطاقة الكلية للدارة :

$$\boldsymbol{E_T = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2}$$

مشتقة الطاقة الكلية بالنسبة للزمن :

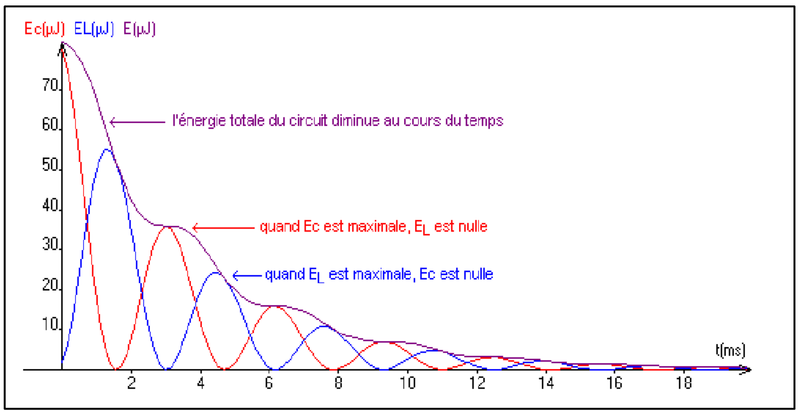
$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{q}{C}.\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = i\left(\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt}\right)$$

باعتبا العلاقة (1) :

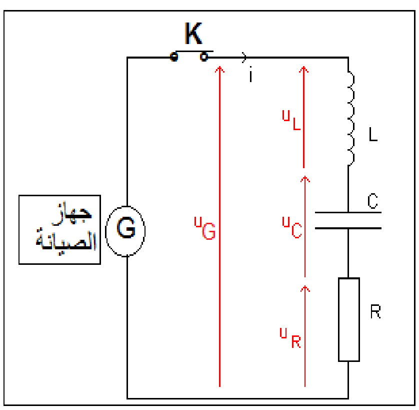
$$\frac{dE_T}{dt} = -R.i^2 < 0$$

-تتناقص الطاقة الكلية للدارة RLC تدريجيا مع الزمن بسبب مفعول جول .

-تتبدد الطاقة بمفعول جول خلال التبادل الطاقي بين المكثف و الوشيعة .




## IV-صيانة التذبذبات الحرة في دارة RLC:




لصيانة التذبذبات الحرة في داة RLC ينبغي تعويض الطاقة المبددة بمفعول جول . ويتم ذلك باستعمال مولد يطبق توترا متناسبا مع شدة التيار $u_G = R_0.i$.

حسب قانون إضافية التوترات :

$$U_G = u_L + u_R + u_C$$

$$R_0 i = L\frac{di}{dt} + ri + Ri + u_C$$

$$L\frac{di}{dt} + (R + r - R_0)i + u_C = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \left(\frac{R_T - R_0}{L}\right).\frac{dq}{dt} + \frac{1}{L.C}.q = 0$$

مع $R_T = R + r$ المقاومة الكلية للدارة .

في الحالة $R_T = R_0$ تصبح المعادلة التفاضلية : $\boldsymbol{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{L.C}.q = 0}$

وهي المعادلة التفاضلية لدارة LC (مقاومتها منعدمة).

في هذه الحالة يتصرف التركيب كدارة LC تذبذباتها جيبية .