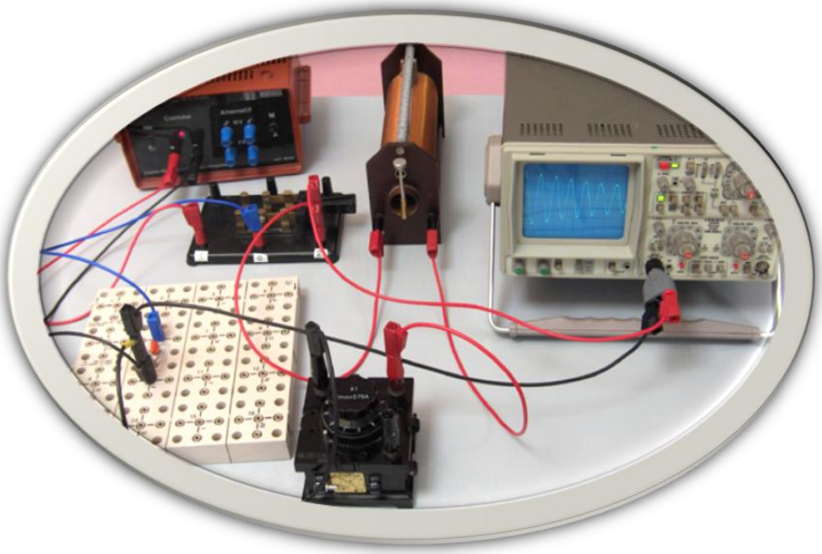
التذبذبات الكهربائية الحرة
في دارة RLC

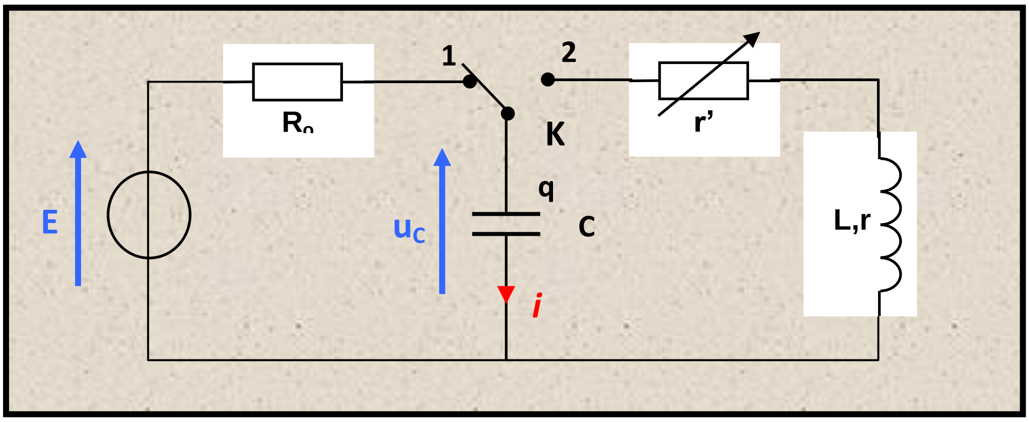


البواعث المستعلة في الاتصالات تستخدم دارات كهربائية تسمى المتذبذبات الكهربائية
إنها اهتزازات كهربائية ، أي اهتزازات للإلكترونات ، التي تولد انبعاث موجات كهرمغنطيسية

1) تفريغ مكثف عبر وشيعة حقيقية .

1 - 1) الدراسة التجريبية .

لنعتبر الدارة الكهربائية التالية :

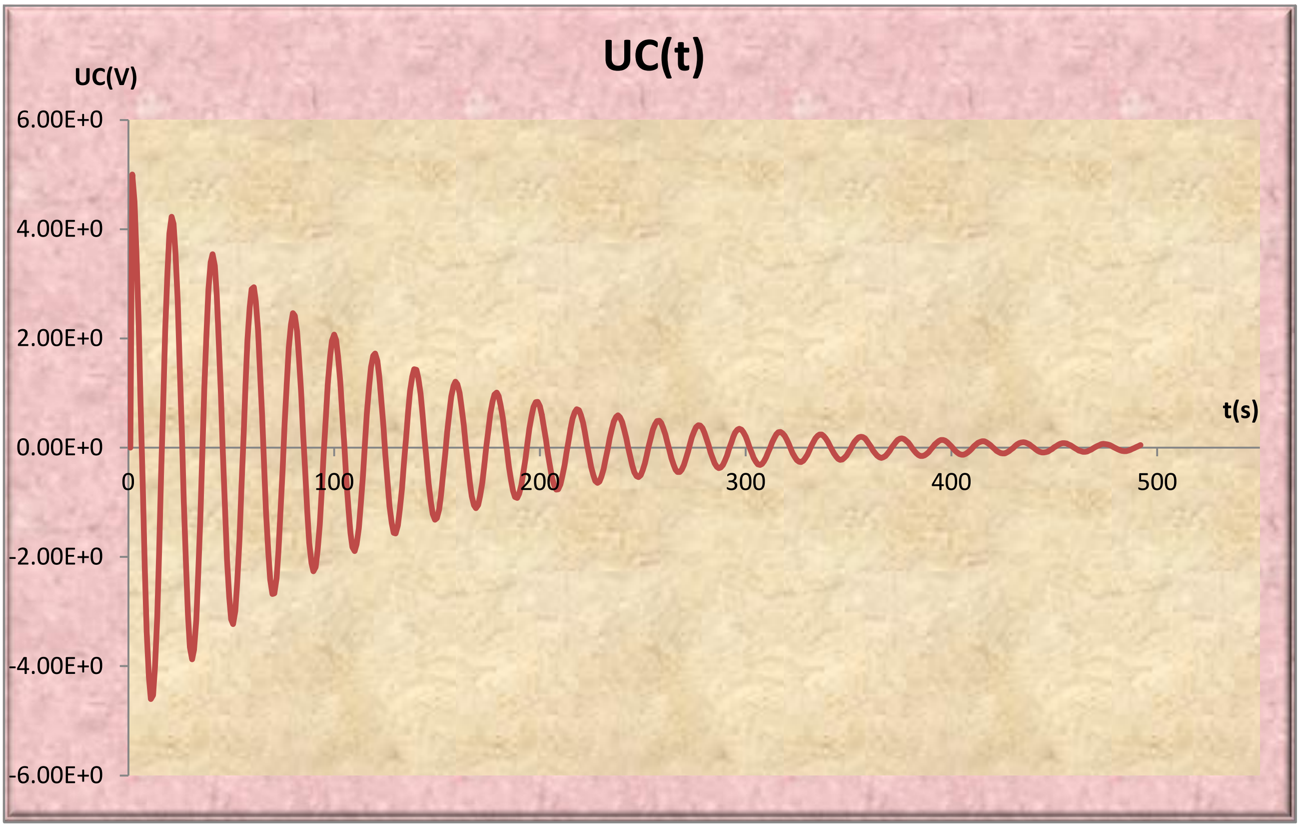


المكثف بدئيا مشحون تحت التوتر E ، نؤرجح قاطع التيار K إلى الموضع 2 .

في حالة $R=r+r'$ ضعيفة ، التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف يتناقص ثم يتزايد تباعا (نفس الشيء كذلك بالنسبة للشحنة q لأنها تتناسب مع $u_C(t)$) .

خلال تغير $u_C(t)$ في نفس المنحى ، تمر من قيمة منعدمة ، في مجالات زمنية منتظمة .

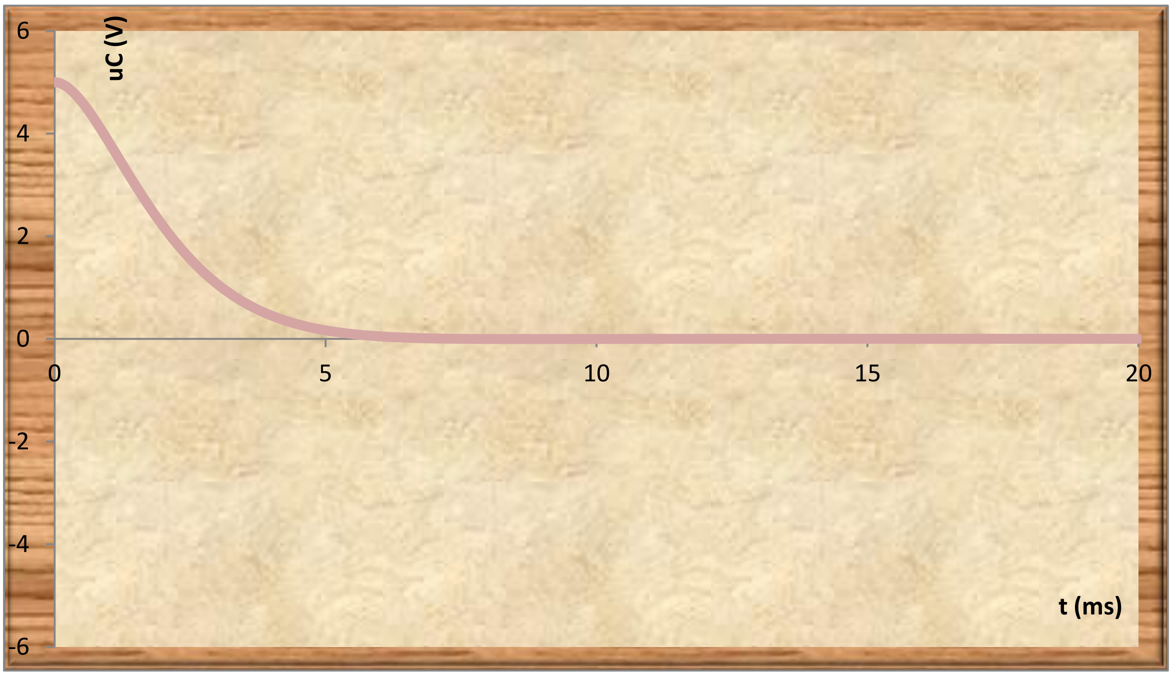
حيث أن المكثف يشحن ثم يفرغ في مدد زمنية منتظمة : تفريغ مكثف في وشيعة يؤدي إلى تذبذبات كهربائية ، يتطور في منحى ثم في المنحى المعاكس .



1 - 2) النظامين التذبذبيين : الشبه الدوري و اللا دوري .

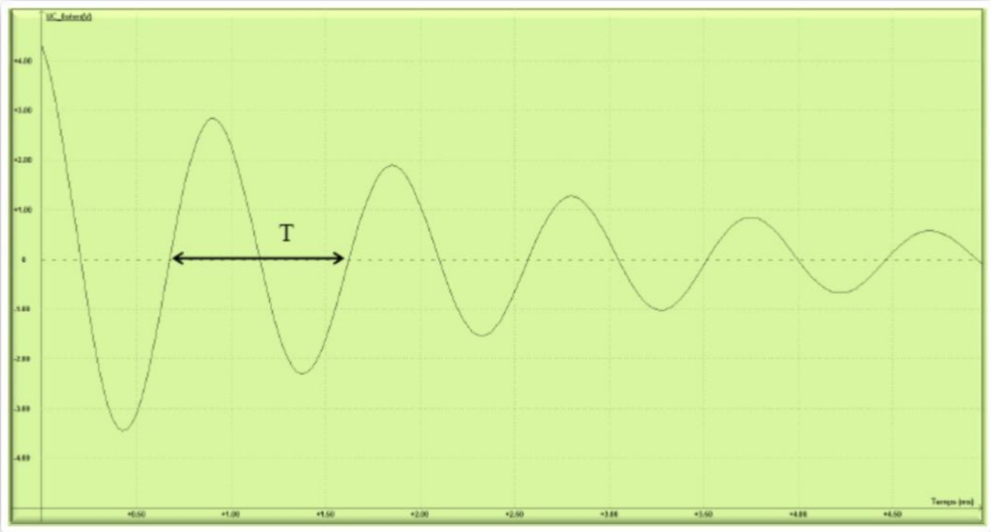
وسع تذبذبات التوتر $u_C(t)$ تنقص مع مرور الزمن ، كلما كانت المقاومة $R=r+r'$ كبيرة كلما كان التناقص أسرع .

بالنسبة لقيمة مرتفعة لهذة المقاومة ، $u_C(t)$ تنقص دون تذبذب .



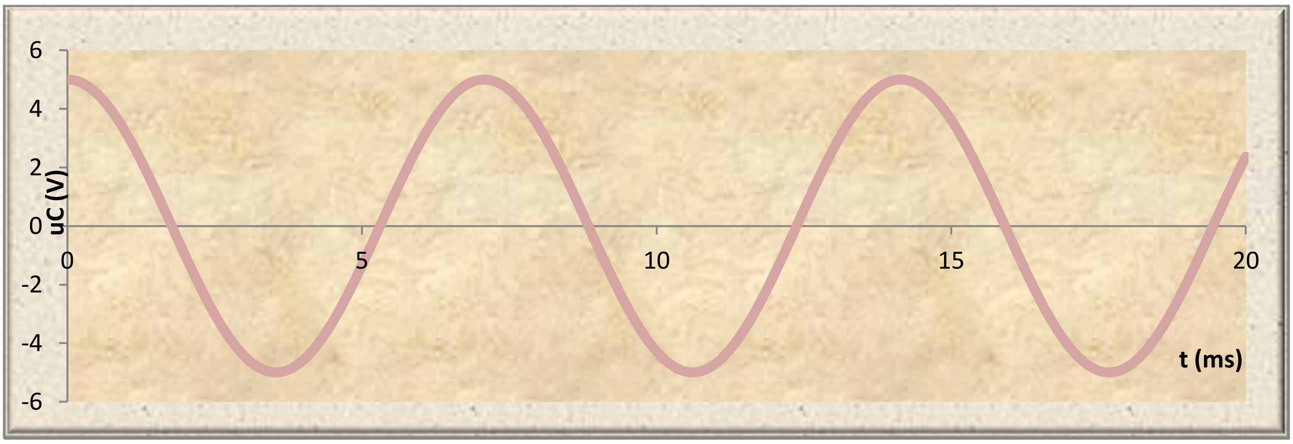
إذا كانت المقاومة ضعيفة فإن وسع هذه التذبذبات ينقص تدريجيا ، نقول بأن التذبذبات تخمد ، و النظام يسمى النظام شبه الدوري .
كلما كانت المقاومة كبيرة كلما كان الخمود حادا .
إذا تجاوزت المقاومة قيمة معينة ، لا نحصل على أي تذبذبات ، النظام المحصل عليه في هذه الحالة تسمى النظام اللا دوري
قيمة المقاومة الموافقة للمرور من النظام الشبه دوري إلى النظام اللا دوري تسمى المقاومة الحرجة R_C قيمتها تتعلق ب L و C .

شبه الدور T يمثل المدة الزمنية الفاصلة بين مرورين متتاليين للتوتر $u_C(t)$ من القيمة المنعدمة و هو يتغير في نفس المنحى .



1 - 3) النظام الدوري .

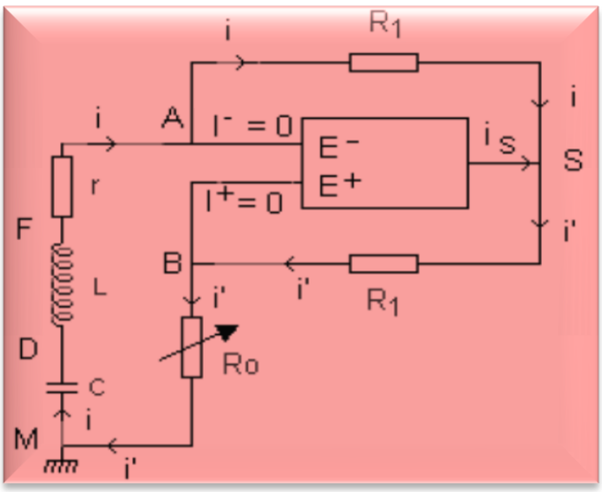
سبب خمود التذبذبات ناتج عن مقاومة الموصل الأومي ، أو مقاومة الوشيعة . عندما تؤول مقاومة الدارة إلى الصفر، وسع التذبذبات يؤول إلى قيمة ثابتة . عند الحد ، المقاومة منعدمة ، التذبذبات تكون دورية : التذبذبات جيبية و الدور T_0 لهذه الذبذبات يسمى الدور الخاص .



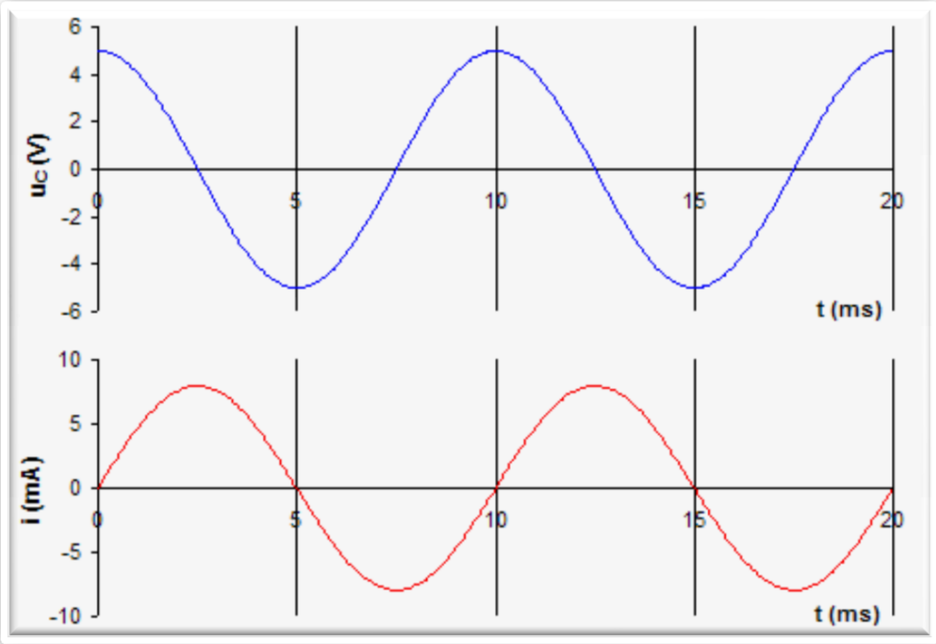
*** ملحوظة : في حالة نظام شبه دوري حيث مقاومة الدارة R أصغر بكثير من المقاومة الحرجة R_C ، شبه الدور T يساوي الدور الخاص T_0 .**

1 - 4) التفسير الطاقي .

لننجز الدارة LC بدون مقاومة (تركيب ذي مقاومة سالبة) :

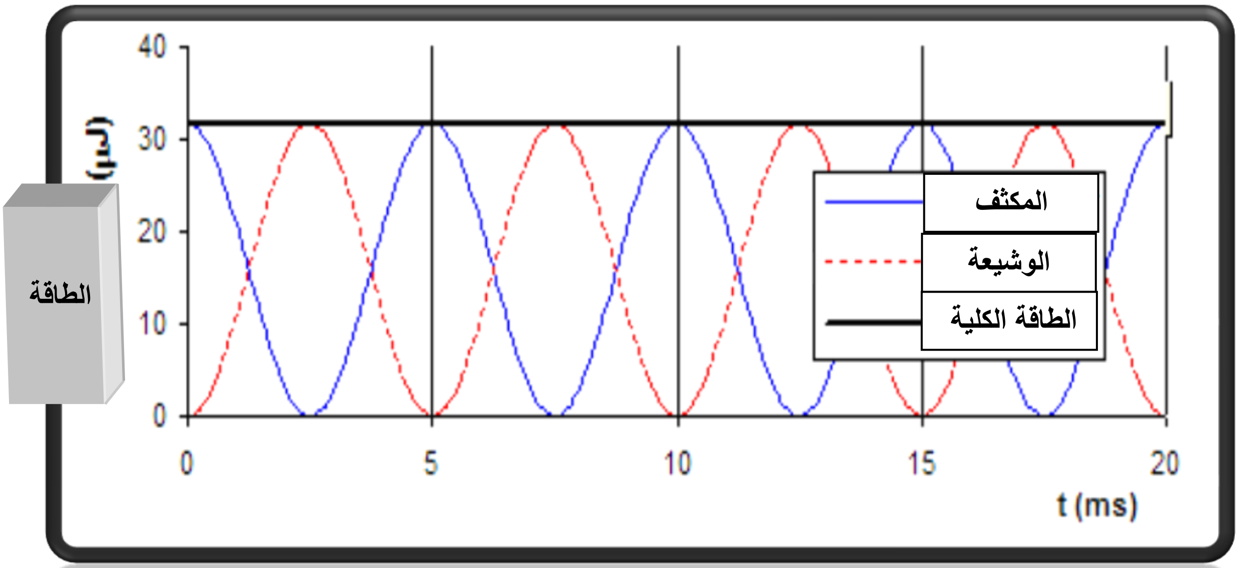


فنلاحظ التغيرات التالية :



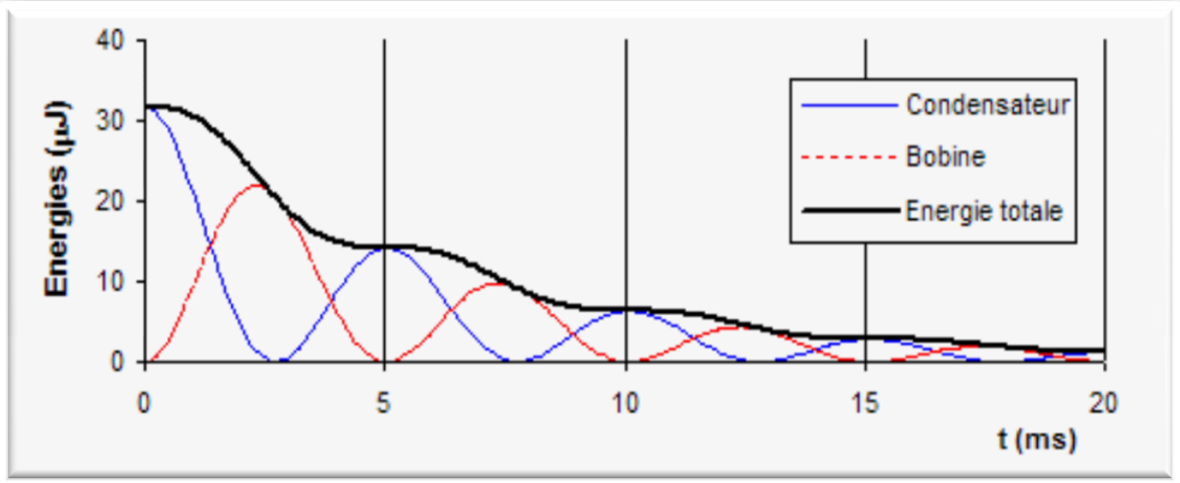
عند اللحظة $t=0$ فقط المكثف هو الذي يختزن الطاقة $E_{t_0}=\frac{1}{2}Cu_C{}^2(t_o)\neq 0$. بينما الطاقة الطاقة المختزنة في الوشيعة فمنعدمة $E_{L_o}=\frac{1}{2}Li^2(t_o)=0$. عند اللحظة t_1 ، التوتر بين مربطي المكثف منعدم ، كل الطاقة انتقلت إلى الوشيعة . $E_L(t_1)$ قصوية و شدة التيار كذلك قصوية . بعد ذلك تعيد الوشيعة هذه الطاقة إلى المكثف ، مما يؤدي إلى شحن المكثف في المنحى المعاكس للمنحى البدئي $(q(t)<0)$.

عند اللحظة t_2 ، شدة التيار منعدمة . الطاقة الكلية للدارة $E(t_2)=E_C(t_2)+E_L(t_2)$ لا توجد في الوشيعة و إنما مخزونة في المكثف. تفرغ المكثف من جديد بواسطة تيار يتغير منحاه (i(t) يغير المنحى) و الظاهرة تتكرر بحيث أن الطاقة الكلية للدارة تبقى ثابتة .



لنعتبر الآن دارة RLC و أنظمتها الشبه الدورية و اللادورية . نحصل على المنحنيات التالية :

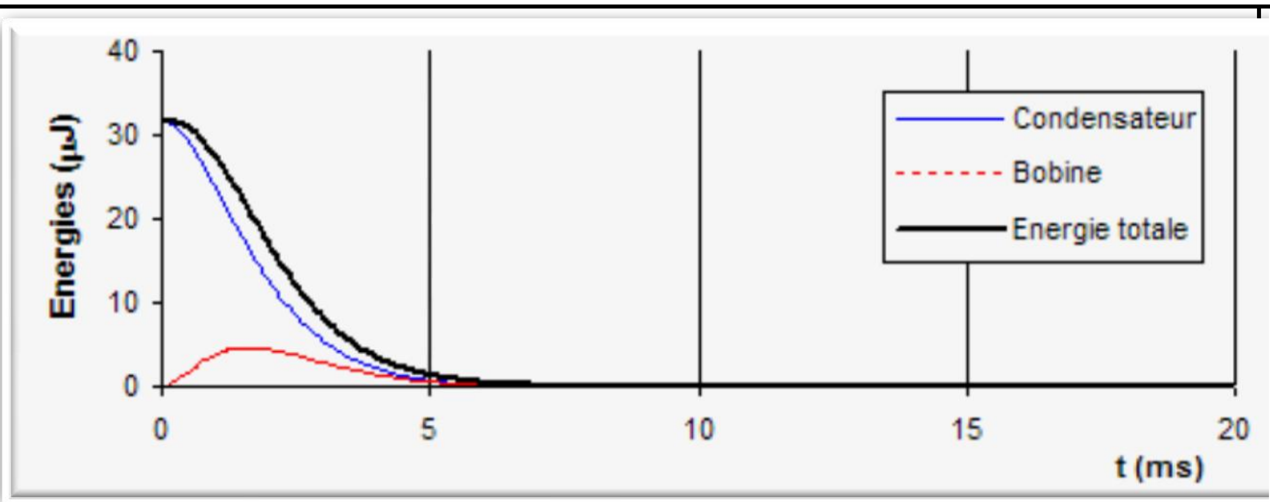
النظام شبه الدوري



الطاقة المختزنة في المكثف تكون قصوية عندما تكون الطاقة المختزنة في الوشيعة منعدمة
عندما تتناقص الطاقة الكهربائية $E_C(t)$ المختزنة في المكثف ، تتزايد الطاقة المغنطيسية $E_L(t)$ المختزنة في الوشيعة و العكس صحيح .

الطاقة الكلية غير ثابتة و إنما تتناقص مع مرور الزمن بفعل ضياع الطاقة بمفعول جول في المقاومة .

نظام لادوري

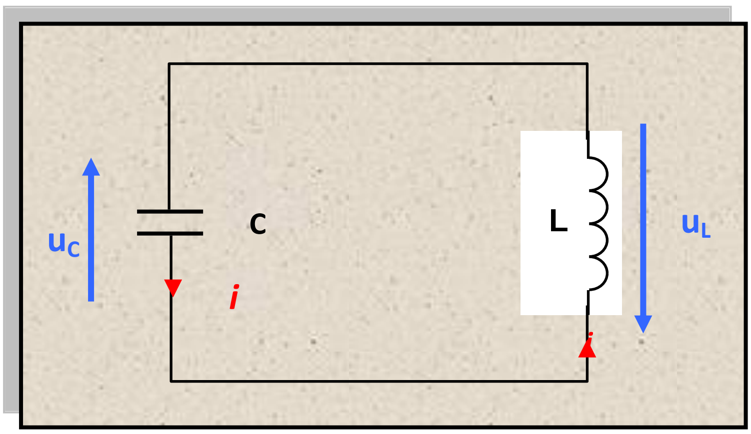


في حالة النظام اللادوري ، يكون هناك فقط انتقال للطاقة من المكثف نحو الوشيعة : $E_C(t)$ تتناقص باستمرار بدون أن تنعدم $E_L(t)$ ،
مع ضياع الطاقة بمفعول جول . الطاقة الكلية تتناقص .

2) الدراسة التحليلية في حالة غياب الخمود .

2 - 1) تغيرات التوتر بين مربطي المكثف .

لنعتبر دارة LC مثالية (بدون مقاومة) ،
حيث المكثف مشحون بدئيا .



حسب قانون إضافية التوترات ، في كل لحظة ، لدينا :

$$u_L(t) + u_C(t) = 0$$

و حسب التوجيه المختار نكتب :

$$L\frac{di}{dt} + u_C(t) = 0$$

نعلم أن :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$$

و منه نحصل على المعادلة التفاضلية التالية :

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C(t) = 0$$

و التي يمكن أن نكتبها على الشكل :

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0}$$

و بذلك نستنتج المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة $q(t)$:

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q(t) = 0}$$

2 - 2) حل المعادلة التفاضلية .

حل المعادلة التفاضلية السابقة له التعبير :

$$u_C(t) = U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$$

المشقة الأولى و المشتقة الثانية بالنسبة للزمن :

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{2\pi}{T_o}U_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2 U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$$

و منه

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_o^2 u_C(t) = -\underbrace{\left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2}_{\omega_o^2} U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right) + \omega_o^2 \times U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right) = 0 .$$

T_0 الدور الخاص للتذبذبات : $u_C(t+T_0) = u_C(t)$ أيا كان الزمن t .

المقدار U_m هو وسع التذبذبات ، معبر عنه بالفولط (V) أي أن تغيرات $u_C(t)$ محصورة بين $-U_m$ و $+U_m$.

φ هي الطور عند أصل التواريخ ، معبر عنه بالراديان (rad) . بصفة عامة نختار $-\pi < \varphi \leq \pi$. وجود φ في تعبير $u_C(t)$ يؤدي إلى كون عند $t = 0$ ، $u_C(t=0) = U_m\cos\varphi$ ليس بالضرورة قصوي .

2 - 3) الثوابت المرتبطة بالدارة .

الدور الخاص T_0 يتعلق بالمميزات L و C للدارة ، هذه المميزات تظهر في المعادلة التفاضلية .

لنبحث عن تعبير T_0 باعتماد المعادلة التفاضلية و حلها :

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{2\pi}{T_o}U_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_o} + \varphi\right)$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2 U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o} + \varphi\right)$$

المعادلة التفاضلية تكتب :

$$-\left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2 U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o} + \varphi\right) + \frac{1}{LC}U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o} + \varphi\right) = 0$$

اذن في كل لحظة لدينا :

$$-U_m\left(\frac{4\pi^2}{T_o^2} + \frac{1}{LC}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T_o} + \varphi\right) = 0$$

U_m ثابتة غير منعدمة ، لكي تتحقق هذه العلاقة في كل لحظة ، يجب أن تكون :

$$-\frac{4\pi^2}{T_o^2} + \frac{1}{LC} = 0$$

بما أن $T_0 > 0$ يمكن أ، نكتب :

$$T_o = 2\pi\sqrt{LC}$$

و بذلك فإن حل المعادلة التفاضلية $\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{1}{LC}\frac{du_C}{dt}=0$ دالة جيبية على الشكل : $u_C(t)=U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t+\varphi\right)$

حيث :

U_m معبر عنه بالفولط ، وسع التذبذبات

φ بالراديان ، الطور عند أصل التواريخ ، حيث $-\pi<\varphi\leq\pi$

T_0 الدور الخاص للتذبذبات حيث $T_o=2\pi\sqrt{LC}$ مع T_0 بالثانية إذا كانت L بالهنري (H) و C بالفراد (F) .

2 - 4) الثوابت المرتبطة بالشروط البدئية .

قيم الثوابت U_m و φ تتعلق بالشروط البدئية على كل من التوتر $u_C(t)$ و شدة التيار $i(t)$.

لنأخذ مثالا بسيطا حيث المكثف مشحون بدئيا تحت التوتر $E=6V$.

بدئيا ، في الدارة LC ، شدة التيار منعدمة .

باعتبار $u_C(t)=U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t+\varphi\right)$

لدينا عند $t=0$: $u_C(0)=U_m\cos\varphi=E$

و بما أن $i(t)=C\frac{du_C}{dt}=-\frac{2\pi}{T_o}U_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_o}t+\varphi\right)$ و $i(0)=-\frac{2\pi}{T_o}U_m\sin\varphi=0$

فإن $\sin\varphi=0$ تشير إلى أن $\varphi=0$ أو $\varphi=\pi$

بما أن $u_C(t=0)=U_m\cos\varphi=E$ فإن $U_m=E$ أو $U_m=-E$

لكن U_m و E مقدارين موجبين ، الحل المناسب هو $U_m=E$ حيث : $u_C(t)=E\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t\right)$

2 - 5) تعبير شدة التيار .

العلاقة $i(t)=\frac{dq}{dt}=C\frac{du_C}{dt}$ تمكن من الحصول على :

$$i(t)=\frac{d}{dt}\left(U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t+\varphi\right)\right)=-\frac{2\pi}{T_o}CU_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_o}t+\varphi\right)=-I_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_o}t+\varphi\right)$$

مع $I_m=\frac{2\pi}{T_o}CU_m$

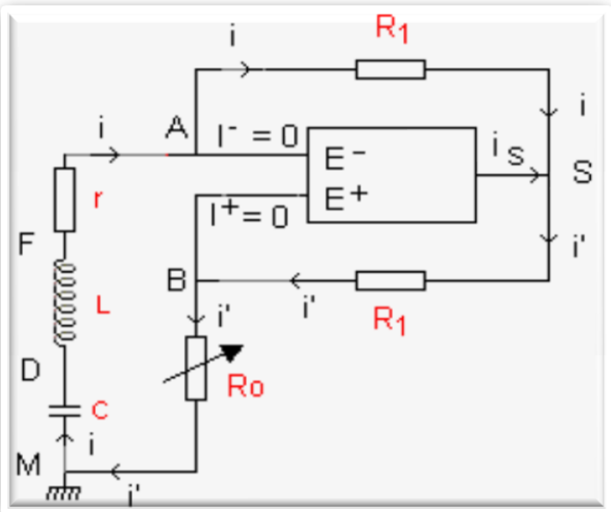
3) صيانة التذبذبات .

في حالة دارة RLC متوالية ، وسع التذبذبات ينقص تدريجيا بفعل انتقال الطاقة بمفعول جول .

غير أنه يمكن صيانة التذبذبات و الحصول ، بالنسبة للمقادير المتذبذبة ، وسعا ثابتا باستعمال جهازا يمنح باستمرار الطاقة الضائعة نتيجة الانتقال الحراري ز و بذلك فإن الطاقة الكلية للدارة تبقى ثابتة

التركيب التالي يمكن من صيانة تذبذبات جيبية في دارة C,L,r رغم وجود المقاومة r .

سنبين أن الجزء ABM يمكن من تعويض ما تبدده r إذا تم اختيار $R_0=r$.



هذا الجهاز للصيانة صمم لكي يحافظ على توتر $u(t) = R_0 i(t)$ بين مربطي ثنائي القطب RLC .خلا كل ثانية ، يمنح لثنائي القطب طاقة تساوي $u(t)i(t) = R_0 i^2(t)$ ، التي تعوض مفعول جول بسبب المقاومة $r = R_0$.