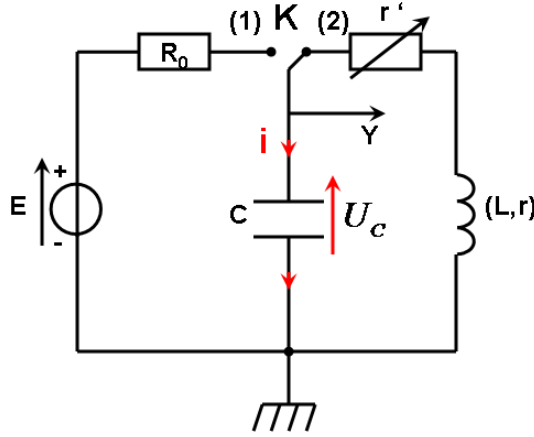


الذبذبات الحرة في الدارة RLC متواليةLes oscillations libres dans un circuit RLC sérieI - تفريغ المكثف :1 - التركيب التجريبي :

تعتبر التركيب التجريبي التالي :



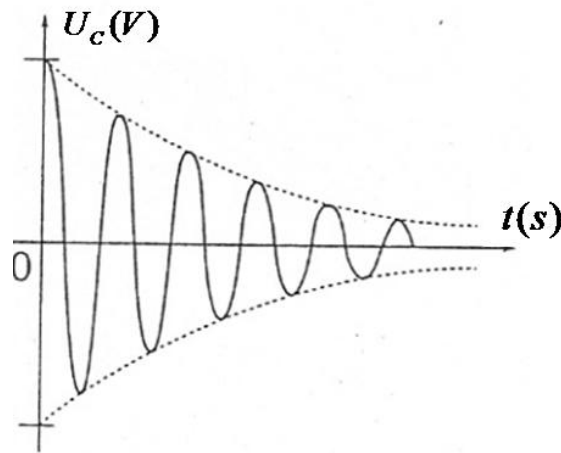
- نشحن المكثف بوضع قاطع التيار K في الموضع (1) .

- نضع قاطع التيار في الموضع (2) فنحصل على دارة RLC متوالية إذا كانت المقاومة R صغيرة نلاحظ أن :

- التوتر  $u_c(t)$  بين مربطي المكثف متناوب أي أنه يتأرجح بين قيم قصوى موجبة و قيم دنيا سالبة , نقول أن تفريغ المكثف تذبذبي .

- وسع التوتر  $u_c(t)$  يتناقص مع مرور الزمن نقول أن التذبذبات مخمدة .

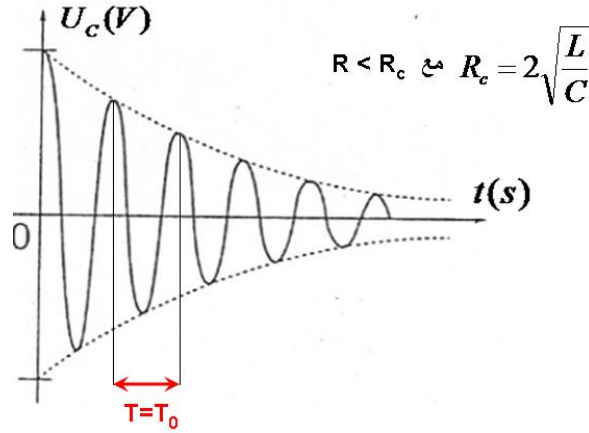
- يؤدي تفريغ مكثف مشحون في وشيعة داراة RLC متوالية إلى ظهور ذبذبات حرة و مخمدة , نقول أن الدارة RLC المتوالية تُكون متذبذبا كهربائيا حرا و مخمدا.

❖ ملحوظة :

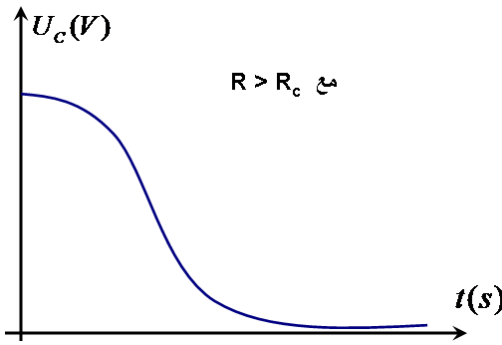
- تسمى هذه الذبذبات بالحررة نظرا لعدم توفر الدارة RLC المتوالية على أي مصدر آخر للطاقة ماعدا الطاقة المخزونة في المكثف.  
- يمكن استعمال GBF مولد ذو تردد منخفض إشارته مربعة حيث يشحن خلال نصف الدور عندما يخضع لرتبة توتر صاعدة خلال نصف الدور و يفرغ يفرغ المكثف خلال الدور الموالي.

2 - أنظمة الذبذبات الحرة :

حسب قيم المقاومة R نحصل على ثلاث أنظمة :

أ - نظام شبه دوري : régime pseudopériodique :يحدث عندما تكون قيمة R صغيرة فنحصل على ذبذبات يتناقص وسعها مع الزمن حيث شبه الدور T يساوي تقريبا الدور الخاص  $T_0$  :ب - نظام لا دوري : régime aperiodique :

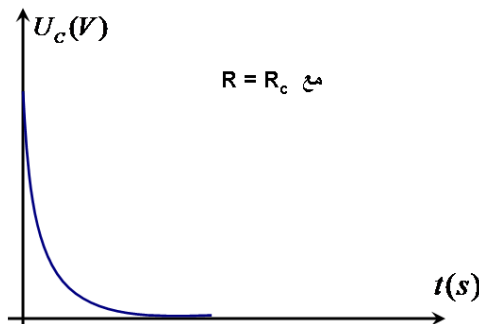
عندما تكون R كبيرة نحصل على خمود مهم فتزول التذبذبات :

ج - نظام حرج : régime critique :

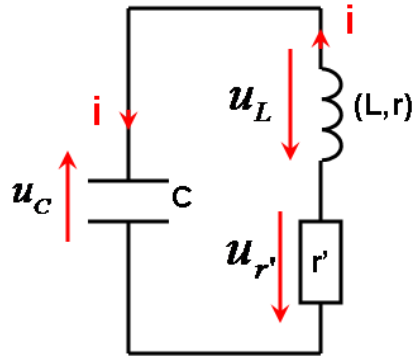
- في الذبذبات الحرة توجد قيمة معينة للمقاومة نرمز لها ب  $R_c$  تسمى مقاومة حرجة و هي الحد الفاصل بين النظام شبه الدوري و النظام اللادوري.

- في هذا النظام يرجع التوتر  $u_C(t)$  إلى الصفر بسرعة بدون تذبذب.

-  $R_c$  تتعلق ب L و C .

3 - المعادلة التفاضلية للدارة RLC :

نعتبر الدارة RLC المتوالية :



حسب قانون إضافية التوترات :  $u_C + u_{r'} + u_L = 0$

وحسب قانون أوم :  $u_{r'} = r'.i$

ولدينا :  $u_L = r.i + L \frac{di}{dt}$

ولدينا :  $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$

نعوض :  $u_C + r'.C \frac{du_C}{dt} + r.C \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$

$$LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + (r'+r)C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر  $u_C(t)$  بين مربطي المكثف. مع  $R = r'+r$

المقدار  $\frac{R}{L} \frac{du_C}{dt}$  يعبر عن ظاهرة خمود الذبذبات .

## II - الذبذبات غير المخمدة في دائرة مثالية LC :

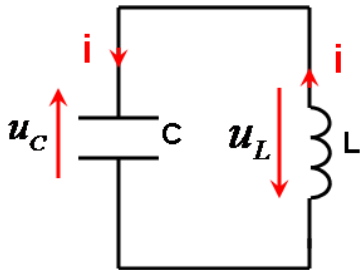
تسمى هذه الدارة بالمثالية لاستحالة تحققها تجريبيا نظرا لتوفر الوشيعه على مقاومة داخلية.

### 1 - المعادلة التفاضلية :

حسب قانون إضافية التوترات :  $u_C + u_L = 0$

مع  $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$   $u_C + L \frac{di}{dt} = 0$

$$u_C + LC \frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$$



المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر  $u_C(t)$  :  $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$

حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية يكتب على الشكل التالي :

$$u_C(t) = U_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) \text{ وهو عبارة عن دالة جيبيية :}$$

$U_{\max}$  : الوسع القصوي. $T_0$  : الدور الخاص $t = 0$  : الطور عند أصل التواريخالطور عند اللحظة  $t$  :  $\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi$ 2 - تحديد تعبير الدور الخاص :

$$u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0} U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \quad \text{اشتقاق :}$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \quad \text{اشتقاق :}$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C$$

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C + \frac{1}{LC} u_C = 0 \quad \text{نعوض في المعادلة التفاضلية :}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

3 - تحديد  $u_m$  و  $\varphi$  :

نحدد  $u_m$  و  $\varphi$  بالاعتماد على شروط البدئية حيث نعبر عن المقدارين :  $u_C(t=0)$  و  $i(t=0) = C \frac{du_C}{dt}$

لدينا المكثف مشحون عند  $u_C(t=0) = E$   $\Rightarrow u_C = E$  :  $u_C(t=0) = E$

$$\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$u_C(t) = E \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

4 - تعبير الشحنة :

$$q(t) = C u_C(t) = C U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$q(t) = q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

5 - تعبير شدة التيار  $i(t)$  :

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

$$i(t) = C \frac{d}{dt} \left( U_m \cos \left( \frac{2\pi}{T_0} t + \varphi \right) \right)$$

$$i(t) = -C U_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \sin \left( \frac{2\pi}{T_0} t + \varphi \right) \quad \text{مع } T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$i(t) = -C.E. \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} \sin \left( \frac{2\pi}{T_0} t + \varphi \right)$$

$$i(t) = -E. \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \left( \frac{2\pi}{T_0} t + \varphi \right) \quad \text{مع } I_m = E. \sqrt{\frac{C}{L}}$$

### III - انتقال الطاقة بين المكثف و الوشيعية :

#### 1 - الطاقة في الدارة LC المثالية :

$$E_e = \frac{1}{2} C u_C^2 \quad \text{- الطاقة الكهربائية المخزونة في المكثف :}$$

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2 \quad \text{- الطاقة المغنطيسية المخزونة في الوشيعية :}$$

$$E = E_e + E_m \quad \text{الطاقة الكلية المخزونة في الدارة LC :}$$

$$E_t = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

- عندما تنقص الطاقة الكهربائية  $E_e$  المخزونة في المكثف , تزداد الطاقة المخزونة في الوشيعية و العكس بالعكس, إذن تبادل طاقي بين الوشيعية و المكثف , وهذا ما يفسر انحفاظ الطاقة الكلية.

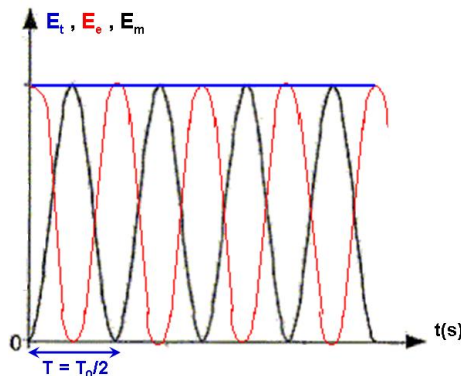
- عندما تكون  $u_C = E$  تكون  $i = 0$

- عندما تكون  $u_C = 0$  تكون  $i = i_m$

$$E_t = \frac{1}{2} C u_m^2 = \frac{1}{2} L i_m^2$$

تتحفظ الطاقة الكلية التي تخزنها الدارة LC و قيمتها ثابتة و تساوي الطاقة البدئية التي يخزنها المكثف.

❖ لتمثيل تغيرات الطاقة بدلالة الزمن نعبّر عن  $E_e(t)$  و  $E_m(t)$  :



$$E_e = \frac{1}{2} Cu^2 \quad \text{مع} \quad U = E \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) \quad \text{تعبير } E_e \text{ بدلالة الزمن : } \quad \text{هام}$$

$$E_e = \frac{1}{2} C.E^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$E_e = E_{\max} \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$E_{\max}$  : الطاقة القصوية عند  $t = 0$

$$E_m = \frac{1}{2} Li^2$$

تعبير  $E_m$  بدلالة الزمن : ✓

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = -C.E \frac{2\pi}{T_0} \sin \frac{2\pi}{T_0} t$$

$$i(t) = -C.E \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} \sin \frac{2\pi}{T_0} t = -E \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$i(t) = -C.E \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} \sin \frac{2\pi}{T_0} t = -E \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$E_m = \frac{1}{2} L.E^2 \frac{C}{L} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$E_m = \frac{1}{2} C.E^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$E_m = E_{\max} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$E_t = E_e + E_m = E_{\max} \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) + E_{\max} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$E_t = E_{\max} \left( \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) \right)$$

$$E_t = E_{\max}$$

هام

❖ يمكن أن نتبت رياضيا أن الطاقة الكلية  $E_t$  ثابتة :

$$u_C + u_L = 0$$

لدينا حسب قانون إضافية التوترات :

$$u_C + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + L.i \frac{di}{dt} = 0$$

نضرب في  $i = \frac{dq}{dt}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2 \right) = 0$$

$$E_t = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2$$

و بالتالي :

## 2 - الطاقة في الدارة RLC :

تعبير الطاقة الكلية المخزونة في الدارة RLC :

$$E_t = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2$$

خلال المدة  $dt$  تتغير الطاقة الكلية بمقدار  $dt$  :

$$\frac{dE_t}{dt} = L i \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dE_t}{dt} = i \left( L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \right)$$

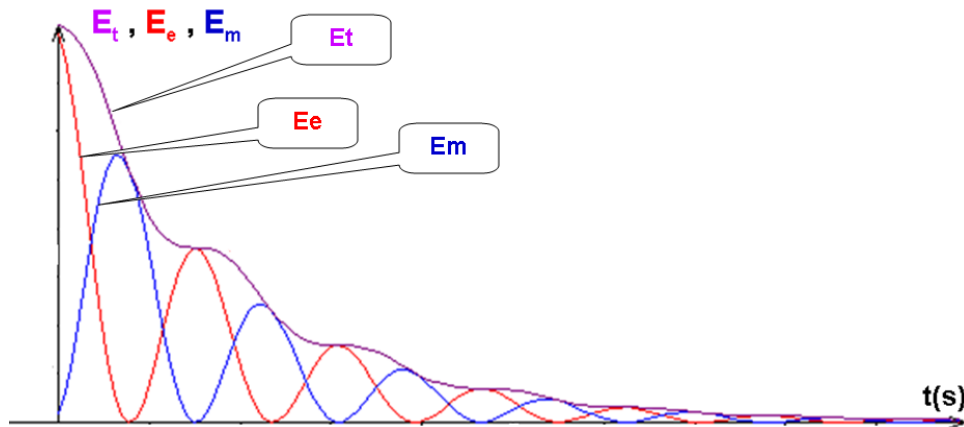
$$\frac{dE_t}{dt} = i \left( L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} \right)$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt}$$

و حسب المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dE_t}{dt} = -R i \frac{dq}{dt} = -R i^2$$

$$dE_t = -R i^2 dt$$

المقدار  $R i^2 dt$  يمثل الطاقة الحرارية المستهلكة في الموصل الأومي و التي تتبدد بمفعول جول :

## III - صيانة الذبذبات :

تُمكن صيانة الذبذبات في الدارة RLC من الحصول على نظام دوري جيبي , باستعمال جهاز يزود الدارة بطاقة تعوض الطاقة المبددة في الدارة بمفعول جول.

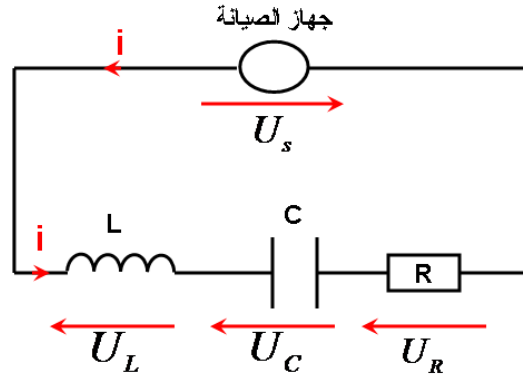
جهاز الصيانة عبارة عن مولد يزود الدارة بتوتر  $u_s$  يتناسب اطرادا مع شدة التيار  $i$  (و هو يتصرف كمقاومة سالبة في اصطلاح

المستقبل) :

- في اصطلاح المستقبل :  $u_s = -R_0.i$

- في اصطلاح المولد :  $u_s = +R_0.i$

$R_0$  : مقاومة قابلة للضبط.



حسب قانون إضافية التوترات :  $u_L + u_R + u_C + u$

$$L \frac{di}{dt} + R.i + u_C - R_0.i = 0$$

$$L.C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} - R_0 C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$L.C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (R - R_0)C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

للحصول على تذبذبات جيبية يجب أن تكتب المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$L.C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

$$R - R_0 = 0 \Rightarrow R_0 = R$$

ويتحقق إذا كان :