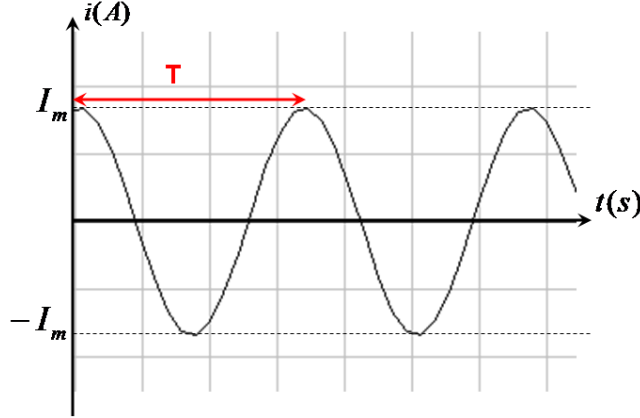


الذبذبات القسرية في الدارة RLC متوالية

4

Les oscillations forcées dans un circuit RLC sérieI – النظام المتناوب الجيبي :1 – خاصيات التيار المتناوب الجيبي :أ – شدة التيار المتناوب الجيبي :

التيار المتناوب الجيبي اللحظي شدته دالة جيبية بالنسبة للزمن :



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad \text{حيث :}$$

I_m : الشدة القصوى للتيار

ω : نبض التيار ب rad

$\omega t + \varphi_i$: طور $i(t)$ عند اللحظة ذات التاريخ t

φ_i : طور $i(t)$ عند أصل التواريخ.

تقاس الشدة الفعالة I بواسطة جهاز الأمبير متر و تربطها ب I_m بالعلاقة التالية : $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

ب – التوتر المتناوب الجيبي :

التوتر المتناوب الجيبي توتر دالته جيبية بالنسبة للزمن تكتب :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

U_m : التوتر القصوي يقاس بواسطة راسم التذبذب.

ω : نبض التوتر ب rad

$\omega t + \varphi_u$: طور $u(t)$ عند اللحظة ذات التاريخ t

φ_u : طور $u(t)$ عند أصل التواريخ.

يقاس التوتر الفعال U بواسطة جهاز الفولطمتر و تربطه ب U_m بالعلاقة التالية : $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

2 – طور التوتر بالنسبة للتيار :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad \text{نعتبر :}$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

فرق الطور بين $u(t)$ و $i(t)$ هو $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

- تسمى φ طور التوتر $u(t)$ بالنسبة للشدة $i(t)$ و هو مقدار جبري ب rad .

- تمكن φ من قياس أو تأخر التوتر $u(t)$ بالنسبة للشدة $i(t)$:

- إذا كانت $\varphi > 0$ فإن التوتر $u(t)$ متقدم في الطور على $i(t)$.
- إذا كانت $\varphi < 0$ فإن التوتر $u(t)$ متأخر في الطور على $i(t)$.
- إذا كانت $\varphi = 0$ فإن التوتر $u(t)$ و $i(t)$ على توافق في الطور.

❖ **ملحوظة :**

باعتبار الشروط البدئية $i(t=0) = 0$ تكون $\varphi_i = 0$ و بالتالي $\varphi = \varphi_u$

إذن طور شدة التيار هو أصل الأطوار ($\varphi_i = 0$) :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t) \quad \text{و بالتالي :}$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

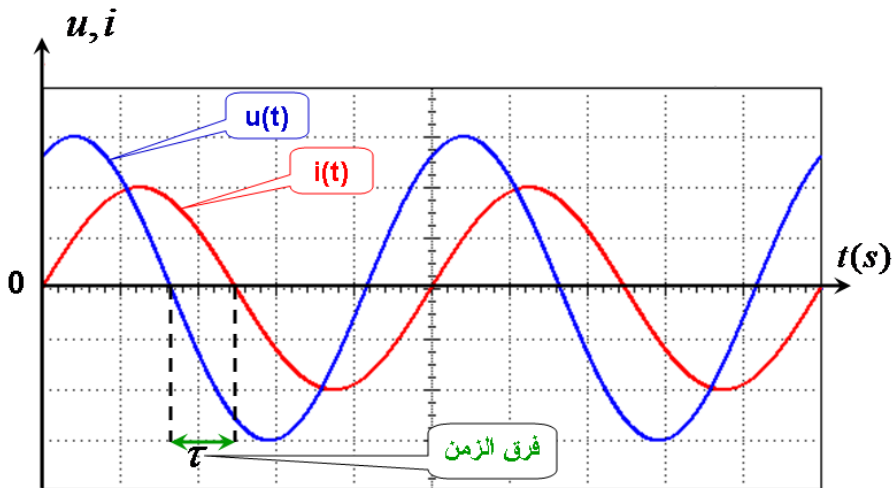
$$u(t) = U_m \cos\left(\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right)$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega(t + \tau))$$

و بالتالي يوافق توتر الطور للتوتر $u(t)$ بالنسبة للشدة $i(t)$ المدة الزمنية τ .

حيث $\tau = \frac{\varphi}{\omega}$ مع τ : تسمى الفرق الزمني بين $u(t)$ و $i(t)$.

و يُمكن قياس τ على شاشة راسم التذبذب من تحديد القيمة المطلقة للطور φ . $|\varphi| = 2\pi \frac{\tau}{T}$

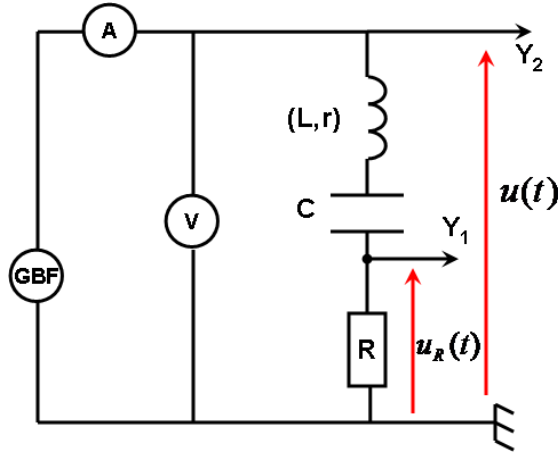


التوتر $u(t)$ متقدم في الطور على $i(t)$ (يصل $u(t)$ إلى القمة $i(t)$ $\varphi > 0$)

II – دراسة دائرة RLC متوالية في نظام جيبى وقسري :

1 – التركيب التجريبي :

نعتبر التركيب الكهربائي التالي :



يزود المولد GBF الدارة RLC المتوالية بتوتر متناوب جيبي : $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

فيظهر في الدارة RLC المتوالية تيار كهربائي شدته $i(t) = I_m \cos(\omega t)$

حيث تمثل $i(t)$ استجابة الدارة RLC المتوالية للإشارة التي يفرضها المولد.

- تسمى الدارة RLC بالرنان و المولد GBF بالمتثير.

- نعين على شاشة راسم التذبذب في المدخل y_1 التوتر $u_R(t)$ بين مربطي الموصل الأومي و الموصل و المدخل y_2 التوتر $u(t)$ بين مربطي المولد.

$$u_R(t) = R.i(t) \Rightarrow i(t) = \frac{u_R(t)}{R} \text{ : حسب قانون أوم لدينا}$$

مما يدل على أن التوتر المعين عند المدخل y_1 يتناسب اطرادا مع شدة التيار $i(t)$.

- المنحنيين $i(t)$ و $u(t)$ لهما نفس التردد N (الدور T) مخالف للتردد الخاص للرنان مما يدل على أن الدارة RLC مقرذببات

كهربائية قسرية مفروضة من طرف المتثير (مولد GBF).

- يتعلق اختلاف الطور بين $u(t)$ و $i(t)$ بتردد المولد.

2 - مفهوم الممانعة : *notion de l'impédance*

❖ تعريف :

الممانعة Z لثنائي القطب هي خارج قسمة التوتر الأقصى u_m المطبق بين مربطيه على الدة القصوى I_m للتيار المار فيه و هي مقدار

$$Z = \frac{U_m}{I_m} \text{ : فيزيائي يميز ثنائي القطب بالنسبة لتردد معين}$$

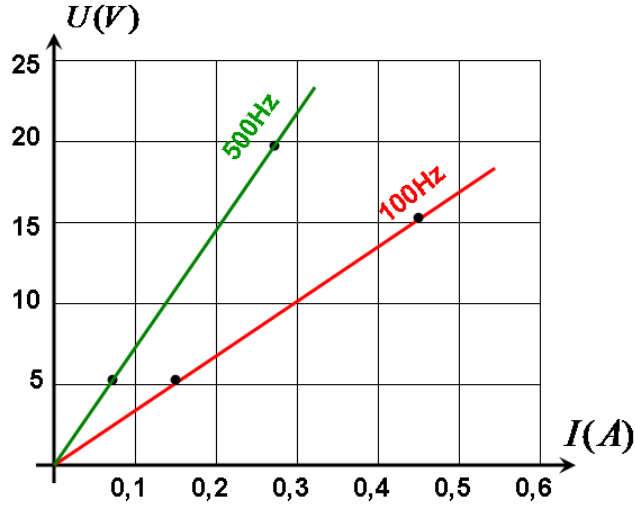
$$\text{بما أن } U_m = U\sqrt{2} \text{ و } I_m = I\sqrt{2} \text{ ومنه } Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$$

❖ مثال :

- نحفظ بقيمة تردد ثابتة $N_1 = 100\text{Hz}$ و نغير التوتر الفعال U الذي يعطيه GBF و نقيس كل مرة الشدة الفعالة I :

- نضبط تردد GBF على قيمة جديدة $N_2 = 500\text{Hz}$ و نعيد نفس التجربة.

	$U(V)$	5	10	15	20
$N_1 = 100\text{Hz}$	$I(A)$	0,07	0,13	0,20	0,27
$N_2 = 500\text{Hz}$	$I(A)$	0,15	0,30	0,45	0,60



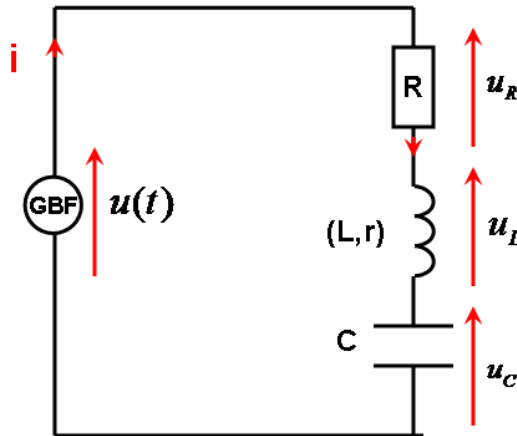
الدالة عبارة عن دالة خطية $U = Z.I$ يسمى Z : المعامل الموجه بالممانعة , نلاحظ أن الممانعة تتعلق بالتردد.

3 – الدراسة النظرية للدائرة RLC المتوالية :

أ – المعادلة التفاضلية للدائرة :

نعتبر الدائرة RLC المتوالية و نختار طور شدة التيار $i(t)$ أصلا للأطوار $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ و التوتر اللحظي

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ مع } \varphi \text{ طور } u(t) \text{ بالنسبة لـ } i(t)$$



بتطبيق قانون إضافي التوترات : $u = u_R + u_L + u_C$

لدينا حسب قانون أوم :

ولدينا $u_L = L \frac{di}{dt}$ مع $r = 0$

وبما أن $q = \int dq = \int idt \Leftrightarrow dq = idt \Leftrightarrow i = \frac{dq}{dt}$

و $u_C = \frac{1}{C} \int_0^t idt$

$$u = R.i(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt$$

وهي المعادلة التفاضلية للدائرة RLC المتوالية :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

بما أن :

$$u = RI_m \cos(\omega t) + L \frac{d}{dt} I_m \cos(\omega t) + \frac{1}{C} \int_0^t I_m \cos(\omega t) dt$$

$$u = RI_m \cos(\omega t) - L\omega I_m \sin(\omega t) + \frac{I_m}{C\omega} \sin(\omega t)$$

$$u = RI_m \cos(\omega t) + L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

مع :

ب - حل المعادلة التفاضلية - إنشاء فرينيل :

في معلم متعامد ممنظم يمكن أن نقرن (associer) كل دالة جيبية $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ بمتجهة \overrightarrow{OM} تسمى **متجهة فرينيل** يمثل عادة عند اللحظة $t = 0$ حيث :

- أصلها O هو أصل المعلم.

- منظمها هو سع الدالة الجيبية $\|\overrightarrow{OM}\| = X_m$

- الزاوية التي تكونها \overrightarrow{OM} مع أصل الأطوار (\overrightarrow{oi}) و هي $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{oi})$

❖ **إنشاء فرينيل :**

لإنجاز مجموع الدالات الجيبية الثلاث التي لها النبض نقوم بإنشاء فرينيل :

$$\vec{V}_1 \begin{cases} \|\vec{V}_1\| = RI_m \\ (\vec{V}_1, \overrightarrow{oi}) = \varphi = 0 \end{cases}$$

نقرن $RI_m \cos(\omega t)$ بالمتجهة \vec{V}_1 حيث :

$$\vec{V}_2 \begin{cases} \|\vec{V}_2\| = L\omega I_m \\ (\vec{V}_2, \overrightarrow{oi}) = \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

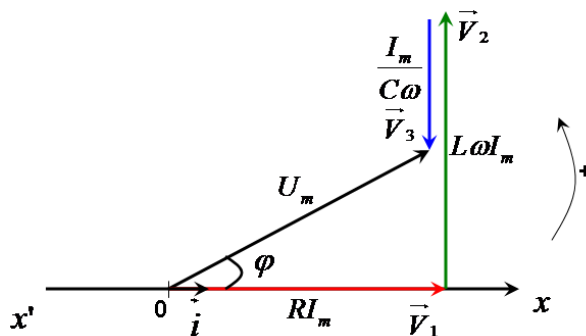
نقرن $L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ بالمتجهة \vec{V}_2 حيث :

$$\vec{V}_3 \begin{cases} \|\vec{V}_3\| = \frac{I_m}{C\omega} \\ (\vec{V}_3, \overrightarrow{oi}) = \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

نقرن $\frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ بالمتجهة \vec{V}_3 حيث :

نقرن $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ بالمتجهة \vec{V} حيث $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$

نحصل على الانشاء الهندسي :



$$u_m^2 = (RI_m)^2 + \left(L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega} \right)^2$$

$$u_m^2 = \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right] I_m^2$$

$$Z = \frac{u_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

$$Z = \frac{u_m}{I_m} \quad \text{لدينا :}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

ممانعة الدارة :

❖ طور التوتر بالنسبة للتيار :

$$\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

$$\text{أي } \tan \varphi = \frac{V_2 - V_3}{V_1}$$

لدينا من خلال المثلث :

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

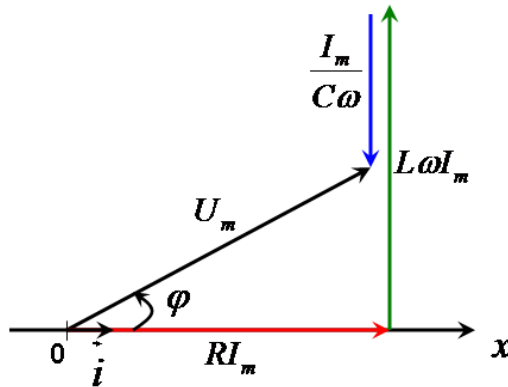
$$\text{أي } \cos \varphi = \frac{V_1}{V} = \frac{RI_m}{U_m} = \frac{R}{Z}$$

إذن من تعبير Z و φ فهما يتعلقان بالتردد

❖ ملحوظة :

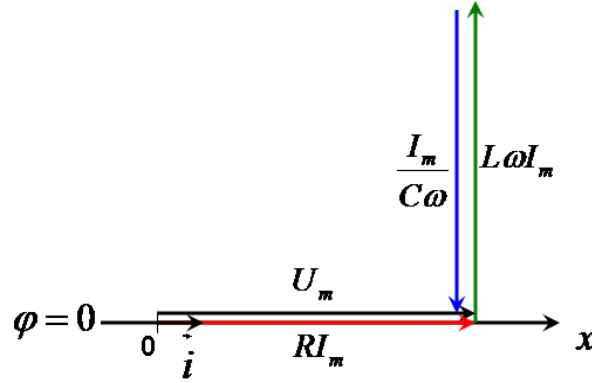
- إذا كانت $\varphi > 0$ فإن $u(t)$ متقدم في الطور على $i(t)$ في هذه الحالة تكون $\tan \varphi > 0$ أي أن : $L\omega > \frac{1}{C\omega}$ يكون التأثير التحريضي

متفوق على التأثير الكثافي :



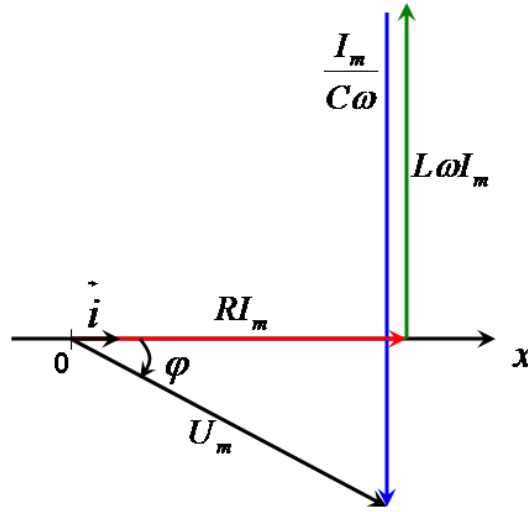
- إذا كانت $\varphi = 0$ فإن $u(t)$ و $i(t)$ على توافق في الطور في هذه الحالة تكون $\tan \varphi = 0$ أي أن : $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ يكون التأثير

التحريضي مساوي للتأثير الكثافي :



- إذا كانت $\varphi < 0$ فإن $u(t)$ متأخر في الطور على $i(t)$ في هذه الحالة تكون $\tan \varphi < 0$ أي أن : $L\omega < \frac{1}{C\omega}$ يكون التأثير الكثافي

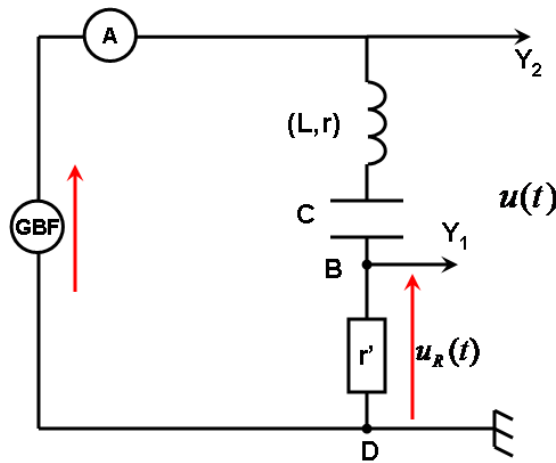
متفوق على التأثير التحريضي :



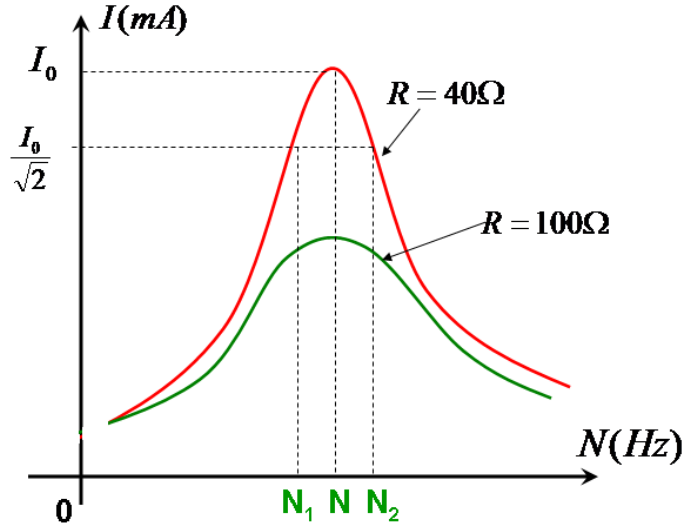
III - ظاهرة الرنين الكهربائي :

1 - الدراسة التجريبية :

نعتبر التركيب الكهربائي التالي :



ن بقي التوتر الفعال للمولد ثابتا , ثم نغير تردده N بالنسبة لقيمتين معينتين للمقاومة الكلية للدارة RLC و نقيس بالنسبة لكل تردد شدة التيار الفعالة I فنحصل على منحنى الاستجابة :



أ – قيمة تردد الرنين :

- نلاحظ أن المنحنيين المحصل عليهما يتوفران على قيمتين بارزتين توافقان نفس قيمة التردد N و كيفما كانت المقاومة الكلية R للدائرة (التردد عند الرنين لا يتعلق بقيمة مقاومة الدائرة).

- تأخذ شدة التيار الفعالة I قيمة قصوى عندما يساوي N تردد المولد (المثير) التردد الخاصة N_0 للدائرة RLC (الرنان).

$$N = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ نقول في هذه الحالة أن الدارة RLC في حالة رنين } \text{résonance} .$$

ب – دور المقاومة الكلية للدائرة :

- إذا كانت مقاومة الدارة R صغيرة يتوفر منحنى الاستجابة على قمة بارزة نقول أن الرنين حاد **aigu** .

- إذا كانت مقاومة الدارة R يزول الرنين ويكون منحنى الاستجابة منبسطة , نقول أن الرنين ضبابي **fou** .

2 – الدراسة النظرية للرنين (المقادير المميزة للرنين) :

أ – التردد عند الرنين :

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \text{ لدينا :}$$

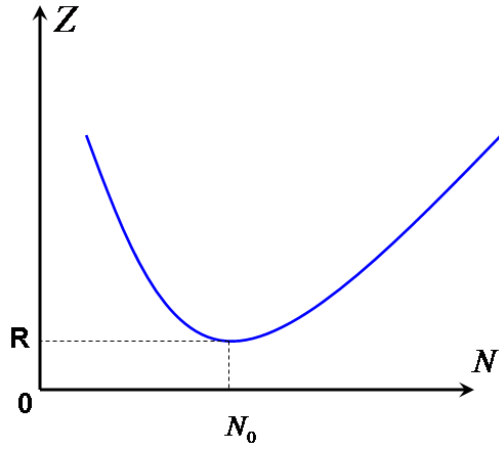
عند الرنين تكون I قصوى أي Z دنوية و يتحقق هذا عندما يكون $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ أي $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$N = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

ب – ممانعة الدارة عند الرنين :

عند الرنين لدينا $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ أي $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ إذن $Z = R$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L2\pi N - \frac{1}{C2\pi N}\right)^2} \text{ لدينا}$$



يبين منحنى $Z = f(t)$ أنه عند الرنين تكون Z دنوية تساوي R .

ج – شدة التيار عند الرنين :

$$I_0 = \frac{U}{R}$$

د – طور التوتر بالنسبة للتيار عند الرنين :

$$\text{لدينا } \tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \text{ و عند الرنين } L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

أي أن $\tan \varphi = 0$ و منه $\varphi = 0$.

عند الرنين يكون التوتر اللحظي المطبق بين مربطي الدارة RLC و الشدة اللحظية $i(t)$ للتيار المار فيهما على توافق في طور.

ه – المنطقة الممررة ذات $-3dB$ (-3décibels) :

❖ تعريف :

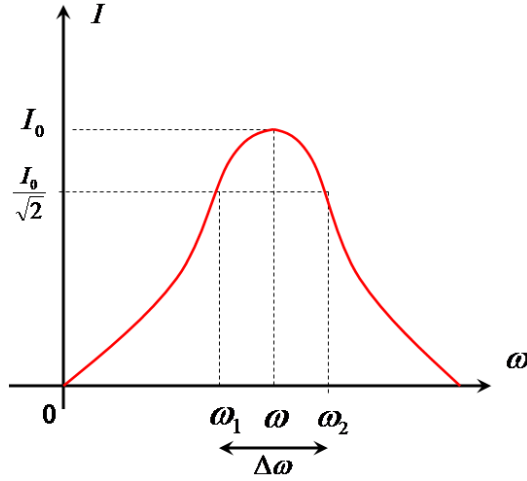
المنطقة الممررة ذات $-3dB$ لدارة RLC هي مجال الترددات $[N_1, N_2]$ للمولد حيث تكون الاستجابة I أكبر أو على الأقل تساوي

$$I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \text{ الشدة الفعالة عند الرنين.}$$

❖ تحديد عرض المنطقة الممررة :

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad I = f(\omega) \text{ لدينا الدالة :}$$

❖ منحنى الاستجابة :



لنحدد القيمتين ω_1 و ω_2 اللتين تحدان المجال $[\omega_1, \omega_2]$ حيث $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{2}R} \quad \text{و عند الرنين} \quad \begin{cases} I_0 = \frac{U}{R} \\ I = \frac{U}{\sqrt{2}R} \end{cases}$$

$$\sqrt{2}R = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$2R^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$R^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R$$

و بالتالي :

إذن تقبل هذه المعادلة 4 حلول منها حالان موجبان :

$$\omega_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4\frac{L}{C}}}{2L}, \quad \omega_2 = \frac{+R + \sqrt{R^2 + 4\frac{L}{C}}}{2L}$$

إذن عرض المنطقة الممررة هو : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$

$$\Delta N = \frac{R}{2\pi L}$$

بما أن $\Delta N = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ فإن

- يتناسب عرض المنطقة الممررة مع المقاومة الكلية R , كلما كانت R صغيرة كلما كان الرنين حاد و يكون العرض ΔN صغيرا. و

بالتالي تكون الدارة انتقائية .

د - معامل الجودة : *facteur de qualité*

يعرف معامل الجودة ب $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_0}$ بدون وحدة.

ω_0 : النبض الخاص للدارة RLC

$\Delta\omega$: عرض المنطقة الممررة

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} \text{ ومنه } \Delta\omega = \frac{R}{L}$$

كلما كانت R صغيرة كلما كان معامل الجودة Q كبير.

❖ ملحوظة :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ و } L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \text{ عند الرنين } Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ لدينا}$$

يسمى أحيانا معامل الجودة بمعامل فرط التوتر *surtension*

$$U_C = \frac{1}{C\omega_0} I_0 \text{ - تعبير التوتر الفعال بين مربطي المكثف عند الرنين :}$$

$$U_L = L\omega_0 I_0 \text{ - تعبير التوتر الفعال بين مربطي الوشيعية عند الرنين :}$$

$$U = RI_0, R = Z \text{ - تعبير التوتر الفعال بين مربطي الدارة RLC :}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} \text{ ولدينا}$$

$$Q = \frac{L\omega_0 I_0}{RI_0} = \frac{I_0}{RC\omega_0 I_0}$$

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U}$$

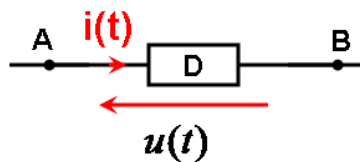
وعند الرنين تكون Q كبيرة وهذا يعني أن $U_C > U$ و $U_L > U$ مما يدل أنه عند الرنين يظهر فرط التوتر و هي ظاهرة تشكل بعض

المخاطر (انبعاث الشرارات و اتلاف بعض عناصر الدارة : مكثف , وشيعية)

IV - القدرة في النظام المتناوب :

1 - القدرة اللحظية : puissance instantanée

نعتب ثنائي قطب AB يمر فيه تيار كهربائي شدته اللحظية $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t)$ و التوتر اللحظي $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi)$:



$$P(t) = u(t).i(t)$$

القدرة اللحظية التي يتبادلها هي :

$$P(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi) \cdot \sqrt{2}I \cos(\omega t)$$

$$P(t) = 2UI \cos(\omega t + \varphi) \cdot \cos(\omega t)$$

$$P(t) = \frac{2UI}{2} [\cos(\omega t + \varphi + \omega t) + \cos(\omega t + \varphi - \omega t)]$$

$$P(t) = UI [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)]$$

إن نلاحظ أن القدرة اللحظية دالة جيبية نبضها هو 2ω ودورها هو $\frac{T}{2}$ حيث T دور $i(t)$ و $u(t)$

2 – القدرة المتوسطة : *puissance moyenne*

القدرة المتوسطة أو القدرة النشيطة هي مجموع القدرات اللحظية المستهلكة من طرف ثنائي قطب خلال دور واحد T .

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T UI [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)] dt$$

$$P = \frac{UI}{T} \cos \varphi \int_0^T dt + \frac{UI}{T} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt$$

$$P = \frac{UI}{T} \cos \varphi [t]_0^T + \frac{UI}{T} \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega t + \varphi)]_0^T$$

$$\text{مع } \sin 4\pi + \varphi = \sin \varphi \quad P = UI \cos \varphi + \frac{UI}{4\pi} [\sin(4\pi + \varphi) - \sin(\varphi)]$$

$$P = UI \cos \varphi$$

- يسمى الجداء $S = UI$ القدرة الظاهرية

- يسمى المعامل $\cos \varphi$ معامل القدرة

❖ ملحوظة :

لدينا الدارة المتوالية RLC :

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} \quad \text{و} \quad U = Z.I \quad \text{و} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

$$P = UI \cos \varphi = UI \cdot \frac{R}{Z} = \frac{U.R.I.I}{U} \quad \text{القدرة المتوسطة المستهلكة :}$$

$$P = R.I^2 \quad \text{القدرة المستهلكة من طرف مقاومة } R \text{ بمفعول جول :}$$

$$P = (R + r)I^2 \quad \text{في حالة } r \neq 0$$