7 حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

Mouvement de rotation d’un corps solide autour d’un axe fixe

I – المقادير الحرية المميزة لحركة الدوران : (الأفصول الزاوي ، السرعة الزاوية ، التسارع الزاوي)

حركة الدوران : يكون جسم صلب غير قابل للتشويه في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) إذا كانت جميع نقطه في حركة دائرية ممركزة على هذا المحور باستثناء النقط المنتمية للمحور (Δ).

1 – الأفصول الزاوي : abscisse angulaire

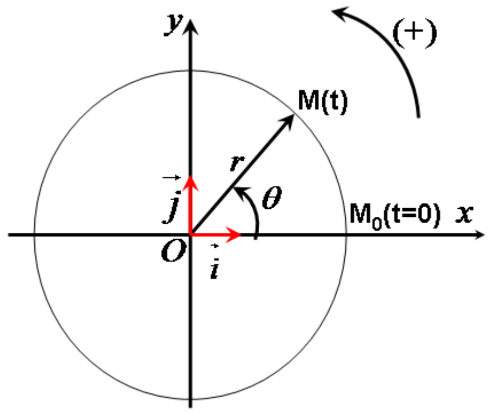
الأفصول الزاوي لنقطة متحركة M من جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) هو الزاوية الموجهة θ حيث :

$$\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$$

الأفصول المنحني :

$$s(t) = M_0M$$

$$s(t) = r.\theta(t)$$



2 – السرعة الزاوية

تساوي السرعة الزاوية لنقطة متحركة من جسم صلب في دوران حول محور ثابت في كل لحظة المشتقة بالنسبة للزمن للأفصول الزاوي في هذه النقطة : $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$

$$\dot{\theta} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = \frac{d\theta}{dt} = R.\dot{\theta}$$

❖ العلاقة بين السرعة الخطية و السرعة الزاوية :

$$v = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}R\theta(t) = R.\frac{d\theta}{dt} = R.\dot{\theta}$$

$$\boxed{v = R.\dot{\theta}}$$

2 – التسارع الزاوي : accélération angulaire

يساوي التسارع الزاوي لنقطة متحركة من جسم صلب في دوران حول محور ثابت في كل لحظة المشتقة بالنسبة للسرعة الزاوية في هذه النقطة.

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

❖ التسارع في أساس فريني :

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$$

a_τ : التسارع المماسي : $a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt} r.\dot{\theta} = r\ddot{\theta}$

a_n : التسارع المنظمي : $a_n = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{(r.\dot{\theta})^2}{r} = r.\dot{\theta}^2$

II – العلاقة الأساسية للتحريك في حالة الدوران حول محور ثابت :

❖ نص العلاقة :

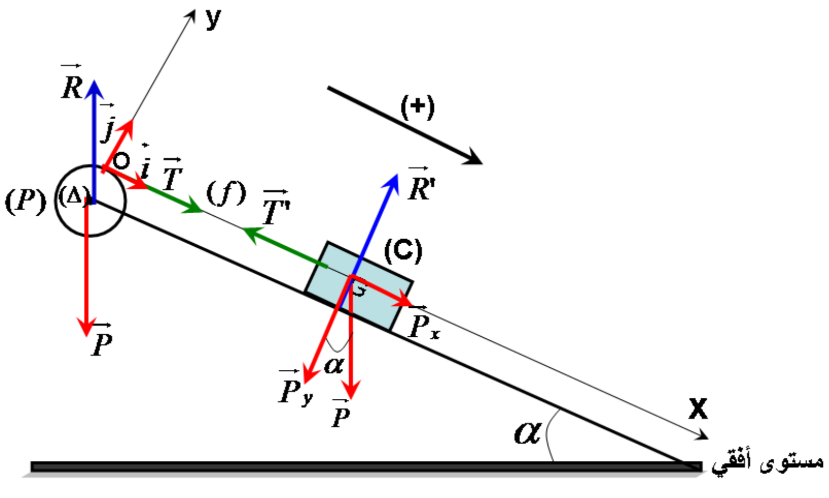
في معلم مرتبط بجسم مرجعي أرضي ، بالنسبة لمحور ثابت (Δ) يساوي مجموع عزوم القوى المطبقة على جسم صلب في دوران حول محور ثابت في كل لحظة جداء عزم القصور J_Δ و التسارع الزاوي للجسم :

$$\boxed{\sum M\left(\vec{F}_{ext}\right) = J_\Delta . \ddot{\theta}}$$

❖ تطبيق :

نعتبر مجموعة ميكانيكية (S) مكونة من :

- بكرة متجانسة (P) شعاعها r و كتلتها m_0 قابل للدوران حول محورها (Δ) الأفقي و الثابت.
- جسم صلب (C) كتلته m مستوى مائل بزاوية α .
- خيط (f) غير قابل للامتداد و كتلته مهملة و ملفوف حول مجرى بكرة و طرفه الأخر مشدود بالجسم (C) :



نحرر المجموعة فينزلق الجسم (C) نحو الأسفل.

➢ عبر عن تسارع المجموعة بدلالة g ، α ، m ، m_0 ؟

❖ دراسة حركة البكرة (P) :

- المجموعة المدروسة : $((P)$ البكرة$)$

جرد القوى المطبقة على البكرة

$\vec{P}$: وزن البكرة

$\vec{R}$: تأثير محور الودان (Δ)

$\vec{T}$:القوة المطبقة من طرف الخيط

بتطبيق العلاقة الاساسية للديناميك في حالة دوران : $\sum \mathrm{M}\left(\vec{F}_{ext}\right) = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$

$$\mathrm{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathrm{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathrm{M}_{\Delta}(\vec{T}) = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

لأن خط تأثير القوتين يتطابق مع محور الدوران : $\mathrm{M}_{\Delta}(\vec{P}) = \mathrm{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0$

$$\mathrm{M}_{\Delta}(\vec{T}) = T.r$$

$$T = \frac{J_{\Delta}\ddot{\theta}}{r}$$

❖ دراسة حركة الجسم (C) :

ـ المجموعة المدروسة : $\{(C)$ الجسم$\}$

جرد القوى المطبقة على الجسم (C) :

$\vec{P}'$: وزن الجسم (C)

$\vec{R}'$: تأثير السطح المائل

$\vec{T}'$: القوة المطبقة من طرف الخيط

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \mathrm{M}\left(\vec{F}_{ext}\right) = m.\vec{a}_G$

$$\vec{P}' + \vec{R}' + \vec{T}' = m\vec{a}$$

نسقط العلاقة المتجهة على محاور المعلم : $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

وفق المحور $(O,\vec{j})$: $\vec{P}'_y + \vec{R}'_y + \vec{T}'_y = m\vec{a}_y$

مع $P_y = P.\cos\alpha = mg\cos\alpha$ و $R = R_y$: $-P_y + R_y + 0 = 0$

$$\boxed{R = P_y = mg\cos\alpha}$$

وفق المحور $(O,\vec{i})$: $\vec{P}'_x + \vec{R}'_x + \vec{T}'_x = m\vec{a}_x$

مع $P_x = mg\sin\alpha$: $P_x + O - T' = ma$

$$\boxed{T' = m(g\sin\alpha - a)}$$

بما أن الخيط غير قابل للامتداد فإن : $T = T'$

$$mg\sin\alpha - ma = \frac{J_{\Delta}}{r}$$

بما أن الخيط لا ينزلق على مجرى البكرة فإن : $a = r.\ddot{\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{a}{r}$

بما أن : $J_{\Delta} = \frac{1}{2}m_0 r^2$ فإن : $mg\sin\alpha - ma = \frac{m_0 r^2.a}{2.r^2}$

$$mg\sin\alpha = \frac{m_0}{2}a + ma$$

$$a\left(\frac{m_2}{2}+m\right)=mg.\sin\alpha$$

$$a\left(\frac{1}{2}\frac{m_0}{m}+1\right)=g.\sin\alpha$$

$$a=\frac{g\sin\alpha}{\left(\frac{m_0}{2m}+1\right)}=cte$$

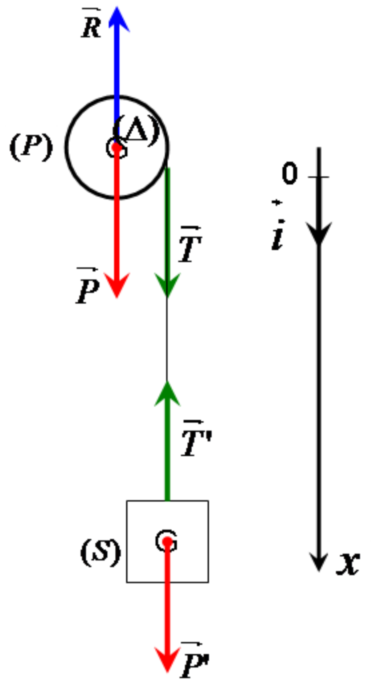
إذن حركة (C) مستقيمية متغيرة بإنتظام

❖ ***تطبيق :***

نعتبر بكرة (P) متباطئة كتلتها $m_C=2kg$ شعاعها $r=10cm$ قابلة للدوران حول ثابت أفقي (Δ) يمر من مركزها.

و نعلق في طرف الخيط غير القابل للامتداد و ملفوف حول البكرة جسما صلبا (S) كتلته $m_S=1kg$ نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية

القيمة المطلقة لعزم المزدوجة المقاومة الناتجة عن الاحتكاك و المطبق على محور الأسطوانة : $M_C=0{,}38N$



1 – أوجد تعبير التسارع الزاوي للأسطوانة بدلالة M_C و r و J_Δ و T_0 ؟

2 – حدد طبيعة حركة الجسم (S) ؟

3 – أحسب قيمة تسارع الجسم (S) ثم استنتج التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ ل (P) ؟

1 - المجموعة المدروسة : (P) (البكرة)

جرد القوى المطبقة على البكرة

$\vec{P}$: وزن البكرة

$\vec{R}$: تأثير محور الدوران (Δ)

$\vec{T}$:القوة المطبقة من طرف الخيط

M_C : عزم مزدوجة الاحتكاك .

بتطبيق العلاقة الاساسية للديناميك في حالة دوران : $\sum M\left(\vec{F}_{ext}\right) = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{T}) + M_C = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

لأن خط تأثير القوتين يتطابق مع محور الدوران : $M_\Delta(\vec{P}) = M_\Delta(\vec{R}) = 0$

$$M_\Delta(\vec{T}) = T.r$$

و باعتبار المنحى الموجب للدوران : $T.r - M_C = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$$\boxed{T = \frac{J_\Delta\ddot{\theta} + M_\Delta}{r}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} = \frac{T.r - M_\Delta}{J_\Delta}}$$

2 - المجموعة المدروسة : $\{(S)$ الجسم$\}$

جرد القوى المطبقة على الجسم (S) :

$\vec{P}'$: وزن الجسم (S)

$\vec{T}'$: القوة المطبقة من طرف الخيط

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum M\left(\vec{F}_{ext}\right) = m.\vec{a}_G$

$$\vec{P}' + \vec{T}' = m\vec{a}$$

نسقط العلاقة المتجهة على محور المعلم $(O,\vec{i})$:

$$P' - T' = m_S a$$

$$m_S g - T' = m_S a \quad \Rightarrow \quad \boxed{T' = m_S g - m_S a}$$

بما أن الخيط غير قابل للامتداد فإن :

$$m_S g - m_S a = \frac{J_\Delta.\ddot{\theta}}{r} + \frac{M_\Delta}{r}$$

بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة فإن : $a = r.\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{a}{r}$

$$m_S g - m_S a = \frac{J_\Delta.a}{r^2} + \frac{M_\Delta}{r}$$

و نعلم أن : $J_\Delta = \frac{1}{2} m_C.r^2$

$$m_S g - m_S a = \frac{m_C.r^2}{2r^2} a + \frac{M_\Delta}{r}$$

$$a\left(m_S + \frac{m_C}{2}\right) = m_S g - \frac{M_C}{r}$$

$$\boxed{a=\frac{m_S\,g-\frac{M_C}{r}}{m_S+\frac{m_C}{2}}}$$

$$a=\frac{1.9,8-\frac{0,38}{0,1}}{1+\frac{2}{2}}=3m.s^{-2}$$

بما أن $a=cte$ فإن طبيعة الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام (متسارعة)

3 – التسارع الزاوي :

$$\boxed{\ddot{\theta}=\frac{a}{r}=\frac{3}{0,1}=30rad.s^{-2}}$$

المعجم العلمي

قرص	Disque	نابض	Ressort
مفجر	Eclateur	دوران	Rotation
أفصول	Abscisse	زاوي	Angulaire
تسارع	Accélération	مشتقة	Dérivé
عزم	Moment	مركبة	Composante
قصور	Inertie	العلاقة الاساسية	Relation fondamentale
حلقة	Couronne	ساق	Tige
أسطوانة	Cylindre	بكرة	Poulie