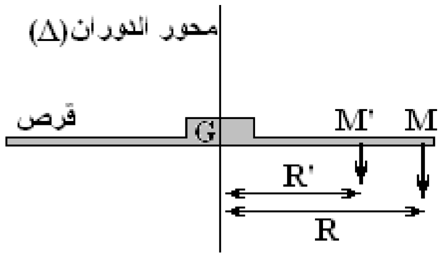
حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

1. الأفصول الزاوي- السرعة الزاوية- التسارع الزاوي:

دوران جسم صلب حول محور ثابت:

يكون جسم صلب،غير قابل للتشويه في حركة دوران حول محور ثابت Δ إذا كانت جميع نقطه لها حركة دائرية ممركزة على هذا المحور Δ (باستثناء النقط المنتمية للمحور Δ)



- مسار النقطتين M و M’ دائريين ممركزين على محور الدوران (Δ)

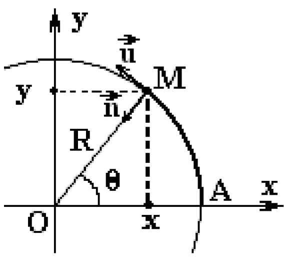
استنتاج:

- جميع نقط القرص لها حركة دائرية ما عدا النقط الموجودة على المحور(Δ) التي توجد في حالة سكون.
- القرص له حركة دوران حول المحور (Δ)

- حين يدور الجسم بالزاوية $(\Delta\theta)$ خلال المدة الزمنية(Δt) فإن جميع نقطه تدور بنفس الزاوية $(\Delta\theta)$.

معلمة موضع المتحرك على المسار الدائري:

يمكن تحديد موضع نقطة متحركة في كل لحظة بالاعتماد على:



- الأفصول الزاوي (θ):

$$\theta = (\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}})$$

(θ): الزاوية بين متجهة الموضع $\overrightarrow{OM}$ و محور الأفاصيل Ox

(θ): يعبر عنها بالراديان rad

- الأفصول المنحني(S):

$S=\overset{\frown}{AM}$ مع A أصل للأفصول المنحني

هام :

العلاقة بين الأفصول (θ) الزاوي و الأفصول المنحني(S): **$S=R.\theta$**

- إحداثيات ديكارت:

$$\overline{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$

$x=R.\cos(\theta)$: إحداثي متجهة الموضع على المحور Ox

$y=R.\sin(\theta)$: إحداثي متجهة الموضع على المحور Oy

ملحوظة:

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$: معادلة مسار دائري شعاعه R و إحداثيات مركزه في معلم ديكارت الزوج (a,b).

- معلم فريني $(M, \vec{u}, \vec{n})$:

$$\overline{OM} = -R.\vec{n} + 0.\vec{u} = -R.\vec{n}$$

السرعة الزاوية للجسم:

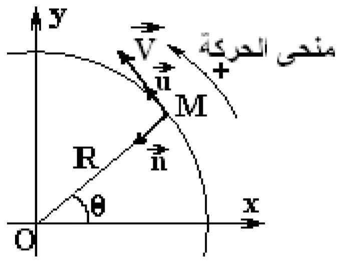
$\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$: السرعة الزاوية هي المشتقة الأولى للأفصول الزاوي بالنسبة للزمن

ملحوظة:

- $\omega_i = \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ و بالتالي: $\omega_i = \dfrac{\theta_{i+i} - \theta_{i-1}}{t_{i+i} - t_{i-1}} = \dfrac{\theta_{i+i} - \theta_{i-1}}{2.\tau}$: السرعة الزاوية اللحظية بالنقطة M_i تساوي السرعة المتوسطية بين الموضعين M_{i-1} و M_{i+1} الذين يؤطران النقطة المعنية M_i.

السرعة اللحظية:

السرعة اللحظية $\vec{V}$ دائما مماسة للمسار و موجهة في منحى الحركة



$$S=R.\theta \quad \text{و} \quad V=\frac{dS}{dt}=\dot{S}$$

و بالتالي: $V=\frac{dS}{dt}=\frac{dR.\theta}{dt}=R.\frac{d\theta}{dt}=R.\dot{\theta}$

السرعة الخطية و وحدتها $m.s^{-1}$: $V=R.\dot{\theta}$

السرعة الزاوية و وحدتها $rad.s^{-1}$: $\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}$

ملحوظة:

- $V=R.\omega$: جميع النقط لها نفس السرعة الزاوية لكنها تختلف في سرعاتها الخطية.
- $R=C^{te}$ و $V=C^{te}$ جميع النقط المتواجدة على نفس الدائرة لها نفس السرعة الخطية

التسارع الزاوي:

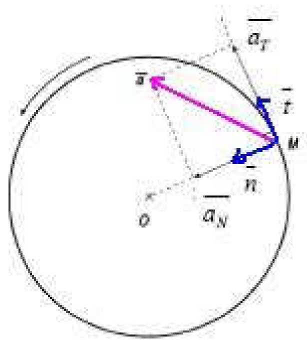
أ. تعريف:

التسارع الزاوي للجسم الصلب هو المشتقة الأولى للسرعة الزاوية بالنسبة للزمن : $\ddot{\theta}=\frac{d\dot{\theta}}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$

ملحوظة:

- $\ddot{\theta}=\frac{d\dot{\theta}_i}{dt}$ و بالتالي: $\ddot{\theta}=\frac{\dot{\theta}_{i+i}-\dot{\theta}_{i-1}}{t_{i+i}-t_{i-1}}=\frac{\dot{\theta}_{i+i}-\dot{\theta}_{i-1}}{2.\tau}$

ب. التسارع المماسي و المنظمي :



$$\vec{a}=a_T.\vec{u}+a_N.\vec{n}$$

التسارع المماسي : $a_T=\frac{dV}{dt}=\frac{dR.\dot{\theta}}{dt}=R.\frac{d\dot{\theta}}{dt}=R.\ddot{\theta}$

التسارع الزاوي و وحدته $rad.s^{-2}$: $\ddot{\theta}=\frac{d\dot{\theta}}{dt}$

التسارع المنظمي : $a_N=\frac{V^2}{R}=\frac{(R.\dot{\theta})^2}{R}=R.\dot{\theta}^2$

2. العلاقة الأساسية للديناميك بالنسبة لجسم صلب في دوران:

نص العلاقة:

في معلم مرتبط بالأرض و بالنسبة لمحور ثابت Δ

$$\sum M(\vec{F}_{/\Delta})=J_\Delta.\ddot{\theta}$$

مجموع عزم القوى المطبقة على جسم صلب في دوران حول محور ثابت : $\sum M(\vec{F}_{/\Delta})=J_\Delta.\ddot{\theta}$

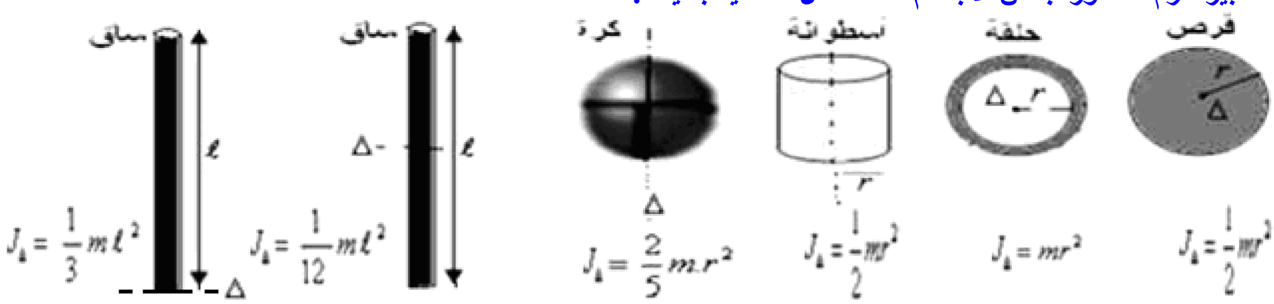
J_Δ: عزم القصور الجسم الصلب بالنسبة لمحور الدوران و وحدته $Kg.m^2$

$\ddot{\theta}$:التسارع الزاوي و وحدته $rad.s^{-2}$

نص العلاقة:

في معلم مرتبط بالأرض مجموع عزم القوى المطبقة على جسم في دوران حول محور ثابت يساوي في كل لحظة جذاء عزم قصور الجسم بالنسبة لنفس المحور و التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$. J_Δ

تعابير عزم القصور لبعض الأجسام ذات أشكال هندسية بسيطة:



3. تطبيقات:

تطبيق 1:

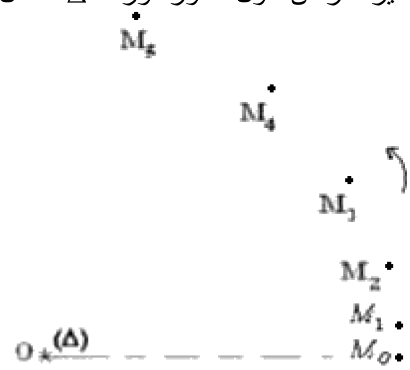
نستعمل منضدة هوائية و ننجز التركيب التالي:

ندير القرص حول محور دورانه Δ فنصل على التسجيل التالي:

السرعة الزاوية للحظية: $\dot{\theta}_i = \dfrac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$

التسارع الزاوي اللحظي: $\ddot{\theta}_i = \dfrac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_{i-1}}{2\tau}$

$\tau = 40ms$

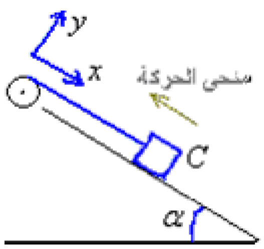


نتخذ المحور Ox المار من النقطة M_0 محورا مرجعا للأفاصيل الزاوية و لحظة تسجيل M_0 أصلا لمعلم الزمن

الموضع	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
التاريخ ti(s)							
$\theta(rad)$							
$\dot{\theta}(rad/s)$							
$\ddot{\theta}(rad/s^2)$							
$\sum M_{(\vec{F}/\Delta)}$							
$\dfrac{\sum M_{(\vec{F}/\Delta)}}{\ddot{\theta}}$							

بمعرفة صلابة النابض و طوله الأصلي نحصل على توتره في كل لحظة: $T_i=K(l_i-l_0)$ مع $l_i=AB$

تطبيق 2:



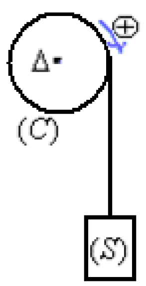
نعتبر مجوعة ميكانيكية مكونة من:

- بكرة متجانسة D شعاعها r و كتلتها m_0 قابلة للدوران حول محورها الأفقي و الثابت،
- جسم صلب C كتلته m موضوع فوق مستوى مائل بزاوية α.
- خيط f غير قابل للامتداد ملفوف حول مجرى البكرة و طرفه الآخر مثبت بالجسم C

نحرر المجموعة فينزلق الجسم C نحو الأسفل(نعتبر الاحتكاكات مهملة)

بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك على الجسم C ثم على البكرة أوجد تعبير تسارع المجموعة بدلالة g و α و m و m_0

تطبيق 3:



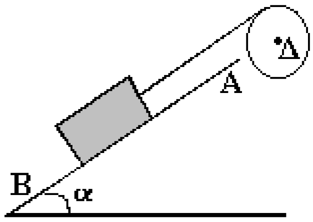
نعتبر أسطوانة C متجانسة ذات كتلة $m_C=2Kg$،شعاعها $r=10cm$ قابلة للدوران حول محور ثابت أفقي Δ يمر من مركزها.

نعلق في طرف خيط غير قابل للمد و ملفوف حول الأسطوانة جسما صلبا S كتلته $m_S=1Kg$، نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية، القيمة المطلقة لعزم المزدوجة المقاومة الناتجة عن الاحتكاك و المطبقة على محور الأسطوانة $Mc=0.38N.m$

1. أوجد تعبير التسارع الزاوي للأسطوانة بدلالة Mc و r و J_Δ عزم قصور الأسطوانة و Tc شدة القوة المطبقة من طرف الخيط على C.
2. حدد طبيعة حركة الجسم S.
3. أحسب قيمة تسارع الجسم S ثم استنتج قيمة التسارع الزاوي للأسطوانة

تمرين 6 :

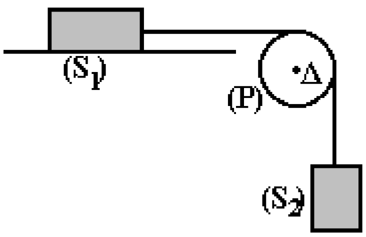
نعتبر جسما صلبا (S) كتلته $m=0,5kg$ ومركز قصوره G ، يمكن أن ينزلق بدون احتكاك فوق مستوى مائل بزاوية $\alpha=30°$ بالنسبة للمستوى الأفقي.
نأخذ $g=10m.s^{-2}$



الجسم (S) مثبت بالطرف الأسفل لحبل (f) ملفوف حول مجرى بكرة متجانسة شعاعها $r=5cm$ ،تدور حول محور أفقي وثابت (Δ).نطلق الجسم (S) من النقطة A بدون سرعة بدئية عند اللحظة $t=0s$ ،فينزلق فوق المستوى المائل مسببا دوران البكرة دون انزلاق الخيط (f) على مجراها.يطبق الخيط (f) على الجسم(S) خلال الحركة قوة ثابتة شدتها $F=2N$.

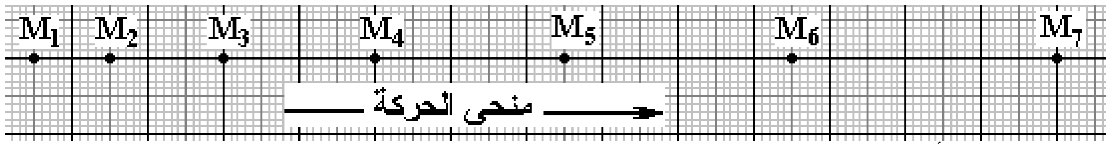
1. بتطبيق مبرهنة مركز القصور على(S) بين أن قيمة التسارع $a_G=1m.s^{-2}$.
1. أوجد دالة السرعة V_G
2. أحسب السرعة بالنقطة B علما أن المسافة AB تساوي 2m
3. أحسب المدة التي تستغرقها حركة (S) ما بين الموضعين A وB.

تمرين 7 :



يمكن لجسم صلب (S_1) ، كتلته $m_1=0.5kg$ ، أن ينزلق على منضدة أفقية. يتصل الجسم (S_1) بجسم (S_2) ، كتلته $m_2=1kg$ ، بواسطة خيط (غير قابل للامتداد و كتلته مهملة) يمر في مجرى بكرة (P) كتلتها $m=0.5kg$ و شعاعها r، قابلة للدوران بدون احتكاك حول محورها (Δ). الخيط لا ينزلق في مجرى البكرة.و عزم قصور البكرة بالنسبة للمحور (Δ) هو $J_\Delta=\frac{1}{2}m\,r^2$.

نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية و نسجل حركة إحدى نقط الجسم (S_1) في مدد زمنية متتالية ومتساوية $\tau=50ms$.



1. اعتمادا على التسجيل أوجد قيمة التسارع a للحركة.
2. بتطبيق مبرهنة مركز القصور أحسب:
   - T_2 شدة القوة المقرونة بتأثير الخيط على (S_2).
   - T_1 : شدة القوة المقرونة بتأثير الخيط على (S_1).
   - قيمة معامل الاحتكاك $\tan\varphi$ بين الجسم الصلب (S_1) و المنضدة
3. أكتب المعادلة الزمنية لحركة الجسم (S_1). نأخذ أصل التواريخ عند لحظة تسجيل النقطة M_3 و أصل الأفاصيل عند النقطة M_1.
   استنتج تعبير سرعة الجسم (S_1) بدلالة الزمن.
4. أحسب تغير الطاقة الحركية بين الموضعين M_1 و M_5.
5. بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية، أحسب شغل القوة المقرونة بتأثير المنضدة على الجسم (S_1) بين M_1 و M_5

2.2. الحركة الدائرية المنتظمة:

2.2.1. تعريف:

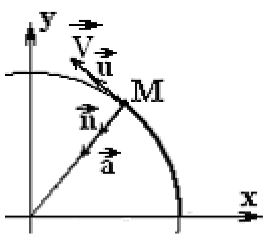
حركة دائرية منتظمة : حركة يبقى خلالها منظم متجهة السرعة ثابت

$$V=\left\|\vec{V}\right\|=C^{te}$$

هام :

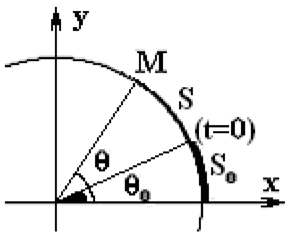
متجهة السرعة $\vec{V}$:
- شدتها V ثابتة
- تغير من منحاها و اتجاهها أثناء الحركة و بالتالي ليست بمتجهة ثابتة

2.2.2. معادلات الحركة :



الحركة الدائرية المنتظمة :
- * منظم متجهة السرعة ثابت $V=C^{te}$
- * السرعة الزاوية ثابتة : $\omega=\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}=\frac{V}{R}$
- * التسارع الزاوي منعدم : $\ddot{\theta}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\dot{\theta}}{dt}$
- * التسارع المماسي منعدم : $a_T=R.\ddot{\theta}$
- * التسارع المنظمي ثابت : $a_N=R.\dot{\theta}^2=R.\omega^2$
- * متجهة التسارع : $\vec{a}=a_T.\vec{u}+a_N.\vec{n}$
  - انجذابية و مركزية و شعاعية
  - منظمها ثابت

2.2.3. المعادلة الزمنية:



- الأفصول الزاوي:

$\omega = \frac{d\theta}{dt} = C^{te}$ و بالتالي : $\theta=\omega.t+\theta_0$

θ_0 : الأفصول الزاوي عند أصل التواريخ (t=0s)

- الأفصول المنحني:

$S=R.\theta$

$S = R.(\omega.t + \theta_0) = R.\omega.t + R.\theta_0 = V.t + S_0$

S_0 : الأفصول المنحني عند أصل التواريخ (t=0s)

هام :

الدور T المدة الزمنية اللازمة لإنجاز دورة كاملة (2π)

$\omega = \frac{2.\pi}{T}$

2.3. الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام:

- تعريف:

حركة دائرية متغيرة بانتظام: حركة تبقى خلالها قيمة التسارع الزاوي ثابتة

$\ddot{\theta} = C^{te}$

- معادلات الحركة:

الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام:

* $\ddot{\theta} = C^{te}$: التسارع الزاوي ثابت
* $\omega = \dot{\theta} = \ddot{\theta}.t + \theta_0$: السرعة الزاوية تتغير مع مرور الزمن
* $a_T = R.\ddot{\theta}$: التسارع المماسي ثابت
* $a_N = R.\dot{\theta}^2$: التسارع المنظمي يتغير مع مرور الزمن
* $\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}.t^2 + \dot{\theta}_0.t + \theta_0 = \frac{1}{2}\ddot{\theta}.t^2 + \omega_0.t + \theta_0$: المعادلة الزمنية

هام:

θ_0 و ω_0 : يشكلان على التوالي الأفصول الزاوي و السرعة الزاوية عند أصل التواريخ t=0s