حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

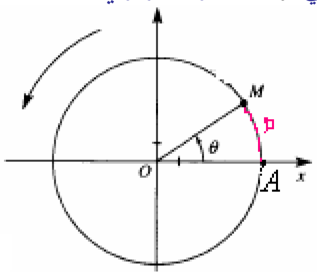
I الأفصول الزاوي –السرعة الزاوية-التسارع الزاوي:

1) تذكير:

يكون جسم صلب، غير قابل للتشويه، في حركة دوران حول محور ثابت Δ إذا كانت جميع نقطه لها حركة دائرية ممركزة على هذا المحور (باستثناء النقط المنتمية للمحور Δ).

2) معلمة موضع المتحرك:

تتم معلمة موضع المتحرك ، في حالة حركة الدوران، باستعمال الأفصول المنحني أو الأفصول الزاوي .



الأفصول المنحني: $s = \widehat{AM}$

الأفصول الزاوي: $\theta = (\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{0M})$

العلاقة بين الأفصول المنحني والأفصول الزاوي : $s = R.\theta$

3) السرعة الزاوية:

السرعة الزاوية هي مشتقة الأفصول الزاوي بالنسبة للزمن : $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ ووحدتها في النظام العالمي للوحدات: rad/s .

السرعة الخطية هي مشتقة الأفصول المنحني بالنسبة للزمن : $v = \dfrac{ds}{dt}$ ووحدتها في النظام العالمي للوحدات: m/s

بما أن: $s = R.\theta$ فإن : $\dot{s} = R.\dot{\theta}$ وهي العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية. (مع $\dot{s} = v$)

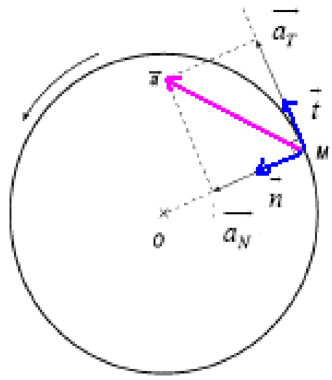
ملحوظة: مبيانيا : السرعة الزاوية اللحظية: $\dot{\theta}_i = \dfrac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$

4) التسارع الزاوي: أ) تعريف:

التسارع الزاوي هو مشتقة السرعة الزاوية بالنسبة للزمن $\ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{dt}$ ب: ra/s^2 .

ملحوظة: مبيانيا : التسارع الزاوي اللحظي: $\ddot{\theta}_i = \dfrac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_{i-1}}{2\tau}$

ب) التسارع المماسي والتسارع ألمنظمي:



في معلم فريني، متجهة التسارع: $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

أي: لها مركبتين : - مركبة مماسية $a_T = \dfrac{dv}{dt}$ - ومركبة منظمية: $a_N = \dfrac{v^2}{r}$

بما أن: $s = r\theta$ فأن: $v = r\dot{\theta} \Leftarrow \dfrac{dv}{dt} = r.\ddot{\theta}$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r\ddot{\theta}$$

$$a_N = r\dot{\theta}^2$$

II العلاقة الأساسية للتحريك في حالة الدوران حول محور ثابت:

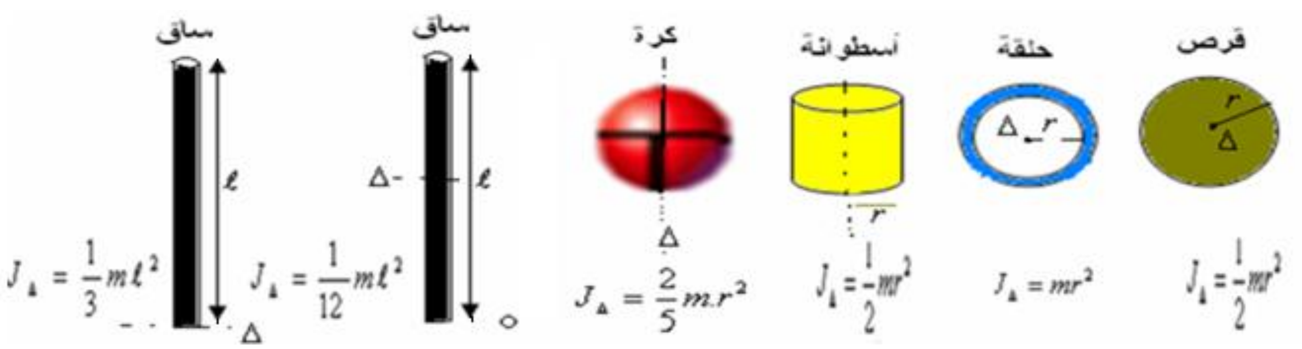
1) نص العلاقة:

في معلم مرتبط بالأرض ، وبالنسبة لمحور ثابت (Δ) ، مجموع عزوم القوى المطبقة على جسم صلب في دوران حول محور ثابت ، يساوي ، في كل لحظة ، جذاء عزم القصور J_Δ والتسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للجسم.

$\boxed{\Sigma M_\Delta \vec{F} = J_\Delta . \ddot{\theta}}$ J_Δ : عزم قصور الجسم ب: $Kg.m^2$

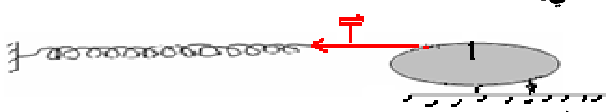
$\ddot{\theta}$: التسارع الزاوي ب: rad/s^2

2) تعابير عزم القصور لبعض الأجسام ذات أشكال هندسية بسيطة:



3) التحقق التجريبي من العلاقة: $\Sigma M_\Delta \vec{F} = J_\Delta . \ddot{\theta}$

نستعمل المنضدة الهوائية وننجز التركيب التالي:

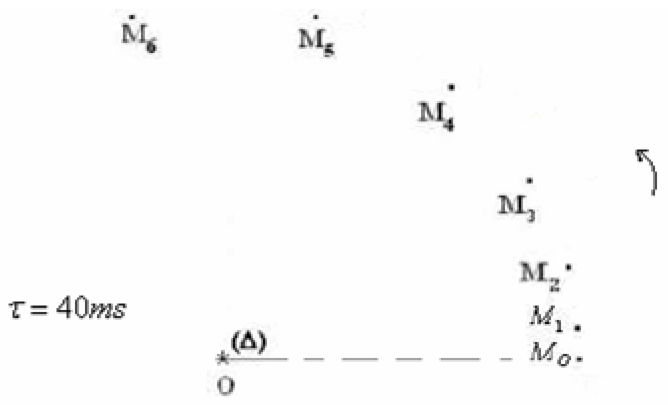


ندير القرص حول محور دورانهΔ ثم نحرره فنحصل على التسجيل التالي:

السرعة الزاوية اللحظية: $\dot{\theta}_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$

التسارع الزاوي اللحظي: $\ddot{\theta}_i = \frac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_{i-1}}{2\tau}$

$\tau = 40ms$



$$\dot{\theta}_1 = \frac{\theta_2 - \theta_0}{2\tau} = \frac{15° - 0°}{2\times 20\times 10^{-3}s} = \frac{\frac{15\times\pi}{180}rad}{0,04} = 6,54 rad/s$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\theta_3 - \theta_1}{2\tau} = \frac{30° - 5°}{2\times 20\times 10^{-3}s} = \frac{\frac{25\times\pi}{180}rad}{0,04} = 10,9 rad/s$$

نتخذ المحور ox المار من M_O محورا مرجعا للأفاصيل الزاوية ولحظة تسجيل M_O أصلا للتواريخ.

القرص خلال حركته يخضع إلى تأثير القوى التالية: وزنه $\vec{P}$ ، تأثير الخيط $\vec{T}$ تأثير سطح التماس $\vec{R}$.

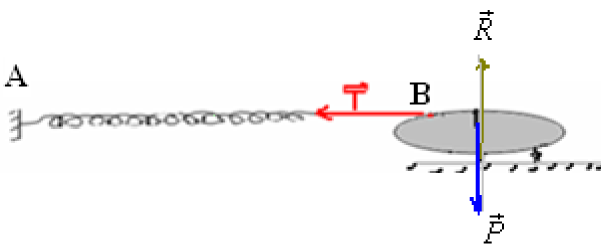
لنعين مجموع عزوم القوى : $\Sigma M_{\vec{F}_\Delta} = M_{\vec{P}_\Delta} + M_{\vec{R}_\Delta} + M_{\vec{T}_\Delta} = M_{\vec{T}_\Delta}$ لأن $\vec{P}$ و $\vec{R}$ تتقاطعان مع محور الدوران $\Leftarrow$ عزم كل منهما منعدم.

وبذلك يمكن تحديد مجموع العزوم في كل لحظة t_i: $\Sigma M_\Delta \vec{F} == T_i . d_i$

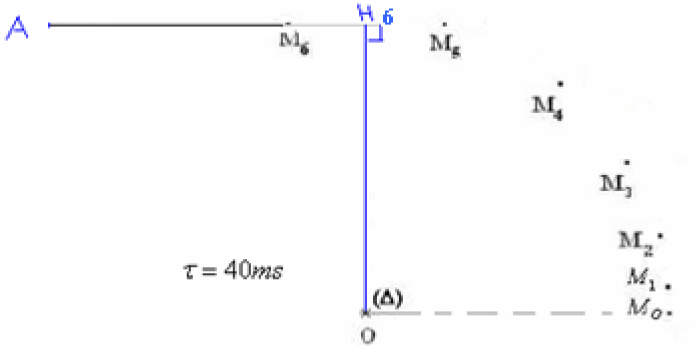
بمعرفة صلابة النابض وطوله الأصلي،

نحصل على توتره في كل لحظة:

$T_i = K(\ell_i - \ell_o) \Leftarrow$ مع: $\ell_i = AB$.



$d_i = AH_i$: هي المسافة الفاصلة بين خط تأثير القوة T_i ومحور الدوران Δ .



ندرج النتائج في الجدول التالي :

الموضع M_i	M_O	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
التاريخ t_i							
$\theta_i (rad)$							
$\dot{\theta}_i (rad/s)$							
$\ddot{\theta}_i$							
$\sum M\vec{F}$							
$\dfrac{\sum M\vec{F}}{\ddot{\theta}}$							

يتضح من خلال نتائج التجربة ما يلي : $\dfrac{\sum M\vec{F}}{\ddot{\theta}} = C^{te}$.

بمعرفة كتلة القرص وشعاعه ، نحصل على قيمة عزم قصوره: $J_\Delta = \dfrac{1}{2}mr^2$ ونستنتج تجريبيا أن: $\dfrac{\sum M\vec{F}}{\ddot{\theta}} = J_\Delta$

وبالتالي : $\Sigma M_\Delta \vec{F} = J_\Delta.\ddot{\theta}$ العلاقة متحققة.

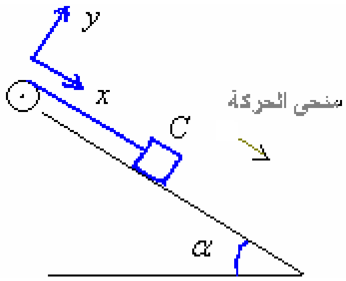
III تطبيقات:

1) تطبيق رقم 1:

نعتبر مجموعة ميكانيكية * بكرة متجانسة P شعاعها r وكتلتها m_p ، قابلة للدوران حول محورها الأفقي والثابت.

*جسم صلب C كتلته m_c موضوع فوق مستوى مائل بزاوية α .

* خيط f غير قابل للمد ملفوف حول مجرى البكرة وطرفه الآخر مثبت بالجسم C .(انظر الشكل)



نحرر المجموعة فينزلق الجسم C نحو الأسفل .(نعتبر الاحتكاكات مهملة.)

عبر عن تسارع المجموعة بدلالة g ، α ، m_c و m_p .

****

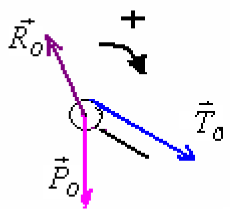
* المجموعة المدروسة {البكرة}

* جرد القوى : تخضع البكرة للقوى التالية :

- $\vec{P_O}$: وزنها .

- $\vec{R_O}$: تأثير محور الدوران.

- $\vec{T_O}$: القوة المطبقة من طرف الخيط.



* تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة: $\sum M_{\vec{F}_\Delta} = J_\Delta.\ddot{\theta}$

أي: $M_\Delta(\overrightarrow{P_O}) + M_\Delta(\overrightarrow{R_O}) + M_\Delta(\overrightarrow{T_O}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$ (1)

بما أن خطي تأثير القوتين $\vec{P}$ و $\vec{R}$ يتقاطعان مع محور الدوران Δ ، فإن عزم كل منهما منعدم .

أي : $M_\Delta(\vec{R}_O)=0$ و $M_\Delta(\vec{P}_O)=0$.

وباعتبار المنحى الموجب لدوران البكرة ، يكون تعبير عزم القوة $\vec{T}_O$ بالنسبة لمحور الدوران Δ هو : $M_\Delta(\vec{T}_O)=+T_O.r$

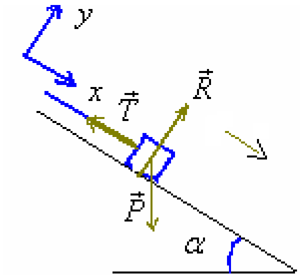
وبالتالي العلاقة (1) تصبح : $T_O.r=J_\Delta.\ddot{\theta}$ أي: $T_O=\dfrac{J_\Delta.\ddot{\theta}}{r}$ (2)

*المجموعة المدروسة {الجسم C }.

*جرد القوى : الجسم C يخضع للقوى التالية : * $\vec{P}$ وزنه .

* $\vec{R}$: تأثير المستوى المائل.

* $\vec{T}$: القوة المطبقة من طرف الخيط.



*تطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم C أثناء حركته في معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ معلم ومتعامد (انظر الشكل)

أي: $\Sigma\vec{F}=m_c.\vec{a}$ $\qquad \vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m_c.\vec{a}_G$ (3)

إسقاط العلاقة (3) على المحور oy : $P\cos\alpha+R=0$ $\Leftarrow$ $R=m_c.g.\cos\alpha$

إسقاط العلاقة (3) على المحور ox : $P\sin\alpha+0-T=m_c.a_x$ $\Leftarrow$ $T=m_c.g.\sin\alpha-m_c.a$ (4)

($a=a_x$ لأن a_y منعدمة ، لا حركة للجسم حسب oy).

بما أن الخيط غير قابل للمد فهو يحتفظ بنفس التوتر في جميع نقطه، وبالتالي : $T=T_O$

ومن خلال العلاقتين (2)و (4) لدينا : $m_c.g.\sin\alpha-m_c.a=\dfrac{J_\Delta.\ddot{\theta}}{r}$

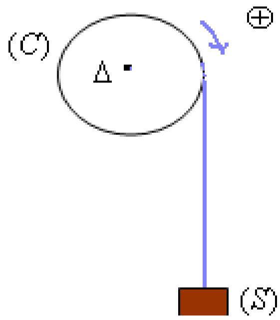
بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة : $s=r\theta$ بالاشتقاق $v=r\dot{\theta}\Leftarrow$ بالاشتقاق $a=r\ddot{\theta}\Leftarrow$.

العلاقة السابقة تصبح: $m_c.g.\sin\alpha-m_c.a=\dfrac{J_\Delta.a}{r^2}$ $\Leftarrow$ $m_c.g.\sin\alpha=a(m_c+\dfrac{J_\Delta}{r^2})$ وبالتالي:

$a=\dfrac{g.\sin\alpha}{1+\dfrac{J_\Delta}{m_c.r^2}}$ مع : $J_\Delta=\dfrac{1}{2}m_pr^2$ $\quad a=\dfrac{g.\sin\alpha}{1+\dfrac{m_p}{2.m_c}}$ $\Leftarrow$ إذن الحركة متغيرة بانتظام.

2) تطبيق رقم 2:

نعتبر اسطوانة C متجانسة ذات كتلتها $m_C=2Kg$ ، شعاعها $r=10cm$ قابلة للدوران حول محور ثابت أفقي Δ يمر من مركزها.
نعلق في طرف خيط غير قابل للمد وملفوف حول الأسطوانة جسما صلبا S كتلته $m_s=1Kg$. نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية .
عزم المزدوجة المقاومة الناتجة عن الاحتكاك والمطبقة على محور الأسطوانة : $M_C=-0{,}38\,N.m$.



بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة اوجد تعبير T شدة القوة المطبقة من طرف الخيط على البكرة C .

أ) بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S أوجد تعبير T' شدة القوة المطبقة من طرف الخيط على S .

ب) احسب قيمة تسارع الجسم S ثم استنتج التسارع الزاوي للاسطوانة $\ddot{\theta}$.

نعطي : $g=9{,}8m/s^2$

أ)* المجموعة المدروسة {الأسطوانة C }.

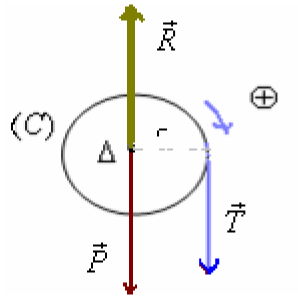
*جرد القوى : الاسطوانة جسم C تخضع للقوى التالية :

* $\vec{P}$ وزنها .

* $\vec{R}$: تأثير محور الدوران.

* $\vec{T}$: القوة المطبقة من طرف الخيط.

*المزدوجة لمقاومة ذات العزم M_C .



* تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة: $\sum M_{\vec{F}_\Delta} = J_\Delta.\ddot{\theta}$

أي: $M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{T}) + M_C = J_\Delta.\ddot{\theta}$ **(a)**

بماأن خطى تأثير القوتين $\vec{P}$ و $\vec{R}$ يتقاطعان مع محور الدوران Δ ، فإن عزم كل منهما منعدم .

أي : $M_\Delta(\vec{R}) = 0$ و $M_\Delta(\vec{P}) = 0$.

وباعتبار المنحى الموجب لدوران البكرة ، يكون تعبير عزم القوة $\vec{T}$ بالنسبة لمحور الدوران Δ هو : $M_\Delta(\vec{T}) = +T.r$

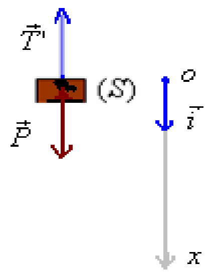
وبذلك تصبح العلاقة **(a)**: $0 + 0 + T.r + M_c = J_\Delta.\ddot{\theta}$

ومنه : $$T = \frac{J_\Delta.\ddot{\theta} - M_C}{r}$$

ب-- المجموعة المدروسة {الجسم س S }.

جرد القوى : الجسم S يخضع للقوى التالية : * $\vec{P}_s$ وزنه .

* $\vec{T}'$: القوة المطبقة من طرف الخيط.



*تطبيق القانون الثاني لنيوتن على الأسطوانة : $\Sigma\vec{F} = m_s.\vec{a}_G$ أي: $\vec{P}_s + \vec{T}' = m_s\vec{a}_G$ (b)

* إسقاط العلاقة (b) على المحور $(o,\vec{i})$ $+P_s - T' = m_S.a$ ومنه : $T' = P_s - m_S.a$ أي:

$$T' = m_s.g - m_S.a$$

وبما أن الخيط غير قابل للمد فإن : $T' = T$ أي : $m_s.g - m_s.a = \dfrac{J_\Delta.\ddot{\theta} - M_C}{r}$

أي: $$m_s.g - \frac{J_\Delta.\ddot{\theta} - M_C}{r} = m_S.a \qquad (d)$$

بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة فإن: $a = r\ddot{\theta}$ ونعلم أن $J_\Delta = \dfrac{1}{2}m_c.r^2$ نعوض في العلاقة (d)

$$m_s.g - \frac{\frac{1}{2}m_c.r^2.\frac{a}{r} - M_C}{r} = m_S.a \qquad \Leftarrow a = \frac{m_s.g. + \frac{M_c}{r}}{m_s + \frac{m_c}{2}} = \frac{1\times 9{,}8 - \frac{0{,}38}{0{,}1}}{1 + \frac{2}{2}} = 3m/s^2$$

بما أن: $a = r\ddot{\theta}$ فإن: $\ddot{\theta} = \dfrac{a}{r} = \dfrac{3}{0{,}1} = 30\,rad/s^2$

SBIRO abdelkrim Lycée Agricole Oulad – Taima Agadir Maroc

الله ولي التوفيق.