

## حل تمارين حركة قذيفة في مجال الثقل

### التمرين 1:

1- نبين أن مسار الكرة مستو:  
نعتبر أن الكرة في سقوط حر باهمال تأثير الهواء ، فإن تسارعها هو:  $\vec{a} = \vec{g}$   
الإسقاط في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$$

باستعمال التكامل واعتبار الشروط البدئية:

$$\begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos \alpha \\ V_{0y} = V_0 \sin \alpha \\ V_{0z} = 0 \end{cases} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

تكامل التسارع :

$$\vec{V} \text{ إحداثيات متجهة السرعة } \begin{cases} V_x = V_0 \cos \alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin \alpha \\ V_z = 0 \end{cases}$$

تكامل السرعة :

$$\begin{cases} x(t) = (V_0 \cos \alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin \alpha)t \\ z(t) = 0 \end{cases} \text{ المعادلات الزمنية للحركة .}$$

عند كل لحظة يكون مسار الكرة في المستوى الرأسي  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  وبالتالي تكون الحركة مستوية.

### 2- معادلة المسار:

للحصول على معادلة المسار نقصي الزمن  $t$  بين المعادلتين الزميتين .

لدينا :  $x(t) = (V_0 \cos \alpha)t$  ومنه :  $t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$  نعوض في المعادلة  $y(t)$  نحصل على :

$$y = -\frac{1}{2}g \left( \frac{x}{V_0 \cos \alpha} \right)^2 + (V_0 \sin \alpha) \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$$

نستنتج معادلة المسار :

$$y = -\left( \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x^2 + (\tan \alpha)x$$

مسار الكرة جزء من شلجم لأنها تكتب على الشكل  $y = ax^2 + bx + c$

3- قيمة  $V_0$  التي تمكن من تحقيق الهدف:

بما أن الكرة تمر محادية للعارضة الأفقية للمرمى ، فإن الشرط الذي ينبغي أن تحققه لتسجيل الهدف هو أن تمر من النقطة B وبالتالي النقطة B تنتمي للمسار ذات الإحداثيات :

$$\begin{cases} x_B = D \\ y_B = H \end{cases}$$

معادلة المسار تكتب:

$$H = -\left(\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}\right) D^2 + (\tan \alpha) D$$

نستنتج :

$$\frac{gD^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} = (\tan \alpha) D - H$$

$$V_0^2 = \frac{gD^2}{2(D \tan \alpha - H) \cos^2 \alpha}$$

$$V_0 = \frac{D}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(D \tan \alpha - H)}}$$

ت.ع:

$$V_0 = \frac{25}{\cos(30^\circ)} \sqrt{\frac{10}{2(25 \tan(30^\circ) - 2,44)}}$$

$$V_0 = 18,6 \text{ m. s}^{-1}$$

تمرين 2:

1- معادلة المسار :

تخضع الكرة الحديدية أثناء حركتها في مجال الثقالة لوزنها فقط.  
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  يكتب:

$$\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{g}$$

ومنه:  $\vec{a} = \vec{g}$

الإسقاط على المحور Ox و على المحور Ox:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} x(t) = (V_0 \cos \alpha). t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + (V_0 \sin \alpha). t + h \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} V_x = V_0 \cdot \cos \alpha \\ V_y = -gt + V_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

للحصول على معادلة المسار نقصي الزمن t من المعادلتين الزمنيتين فنحصل على:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}g \left( t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha} \right)^2 + (V_0 \sin \alpha) \left( \frac{x}{V_0 \cos \alpha} \right) + h$$

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha).x + h$$

2- تعبير السرعة البدئية  $V_0$  وحسابها :

عند الموضع  $C$  لدينا :  $\begin{cases} x_C = x_1 \\ y_C = 0 \end{cases}$  نعوض في معادلة المسار نحصل على:

$$0 = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x_1^2 + (\tan \alpha).x_1 + h$$

$$\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x_1^2 = (\tan \alpha).x_1 + h$$

$$V_0^2 = \frac{g \cdot x_1^2}{2(x_1 \cdot \tan \alpha + h) \cos^2 \alpha} \Rightarrow V_0 = \frac{x_1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(x_1 \cdot \tan \alpha + h)}}$$

$$V_0 = \frac{19,43}{\cos(45^\circ)} \sqrt{\frac{10}{2 \times (19,43 \times \tan(45^\circ) + 1,8)}} = 13,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ ت.ع.}$$

3- الإرتفاع الذي تصل إليه الكرة:

عند قمة المسار  $S$  يكون :  $\left( \frac{dy}{dt} \right)_S = 0$  أي :  $-\frac{2g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha = 0$

$$x = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha \cdot (\tan \alpha)}{g} \Rightarrow x_S = \frac{V_0^2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{g}$$

$x_S = \frac{V_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{2g}$  نعوض  $x_S$  في تعبير معادلة المسار نجد:

$$y_S = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x_S^2 + (\tan \alpha).x_S + h$$

$$H = y_S = \frac{V_0^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{2g} + h$$

$$H = \frac{13,2^2 \times (\sin(45^\circ))^2}{2 \times 10} + 1,8 = 6,2 \text{ m}$$

4-إحداثيات متجهة السرعة عند قمة المسار  $S$  حيث الارتفاع  $H$ :

$$\begin{cases} V_{xS} = V_0 \cos \alpha = 13,2 \times \cos(45^\circ) = 9,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ V_{yS} = 0 \end{cases}$$

5-منظم متجهة السرعة عند النقطة  $C$ :

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على الكرة بين النقطتين  $A$  نقطة انطلاق الكرة و  $C$  نكتب :

$$\Delta E_c = E_{cC} - E_{cA} = W_{A \rightarrow C}(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2} m \cdot V_C^2 - \frac{1}{2} m \cdot V_0^2 = mgh \Rightarrow \frac{1}{2} V_C^2 - \frac{1}{2} V_0^2 = g \cdot h$$

$$V_C = \sqrt{V_0^2 + 2gh} \Rightarrow V_C = \sqrt{13,2^2 + 2 \times 10 \times 1,8} = 14,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

6-قيمة الزاوية  $\beta$ :

في النقطة  $C$  حيث تسقط الكرة لدينا :

$$\cos \beta = \frac{V_{xC}}{V_C} = \frac{V_0 \cos \alpha}{V_C}$$

ت.ع:

$$\cos \beta = \frac{9,33}{14,5} = 0,64$$

$$\beta = \cos^{-1}(0,64) = 50,2^\circ$$

تمرين 3:

1-من خلال المبيان نلاحظ أن الدالة  $V=f(t)$  تألفية (وتناقصية) وهي تكتب على الشكل

$$V(t) = a_x t + V_A$$

حيث التسارع و  $V_0$  السرعة البدئية .  
نستنتج أن الحركة مستقيمة متغيرة (متباطئة) بانتظام .

2-استنتاج قيمة كل من  $a_x$  و  $V_A$  :  
 من خلال المبيان يمثل الأرتوب  $V_A$  السرعة عند  $t=0$  نجد :  $V_A = 10 \text{ m.s}^{-1}$   
 كما أن  $a_x$  تمثل المعامل الموجه للمنحنى نكتب:

$$a_x = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{10 - 8}{0 - 4} = -0,5 \text{ m.s}^{-1}$$

3-حساب  $f$  شدة قوة الاحتكاك :  
 تخضع الكرة أثناء حركتها على الجزء  $AB$  للقوى التالية:  
 $\vec{P}$  : وزن الكرة .  
 $\vec{R}$  : تأثير السطح الأفقي.  
 نطبق القانون الثاني لنيوتن في المعلم  $(A, \vec{i})$  الذي نعتبره غاليليا نكتب:

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

السقاط على المحور  $Ax$  :

$$0 - f = m \cdot a_x$$

$$f = -m \cdot a_x \text{ أي}$$

$$f = -0,5 \times (-0,5) = 0,25N$$

4-حساب سرعة الكرة عند اللحظة  $t=4s$ :  
 الطريقة الأولى:  
 معادلة السرعة:

$$V(t) = a_x t + V_A$$

السرعة  $V_B$ :

$$V_B = a_x t_B + V_A$$

ت.ع:

$$V_B = -0,5 \times 4 + 10 = 8 \text{ m.s}^{-1}$$

الطريقة الثانية :

باستعمال المبيان  $V=f(t)$ :

عند اللحظة  $t=4s$  نجد السرعة  $V = V_B = 8 \text{ m.s}^{-1}$

5-المعادلات الزمنية  $x(t)$  و  $y(t)$ :

تخضع الكرة لوزنها  $\vec{P}$  فقط :

القانون الثاني لنيوتن :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= m\vec{a} \\ m\vec{g} &= m\vec{a} \\ \vec{a} &= \vec{g}\end{aligned}$$

نسقط العلاقة على  $OxOy$ :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

الحركة مستقيمة منتظمة على المحور  $Ox$  و مستقيمة متغيرة بانتظام على المحور  $Oy$ .  
باعتبار الشروط البدئية:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{cases} \quad \begin{cases} V_{0x} = V_B \\ V_{0y} = 0 \end{cases}$$

المعادلتان الزمنيتان :

$$\begin{aligned}x(t) &= V_B t \quad \text{أي} \quad x(t) = V_{0x} t + x_0 \\ y(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + h \quad \text{أي} \quad y(t) = -\frac{1}{2} a_y t^2 + V_{0y} t + y_0\end{aligned}$$

6- تصل الكرة الى النقطة C عند اللحظة  $t_c$  حيث الارتوب يكون :  $y(t_c) = 0$

$$-\frac{1}{2} g t_c^2 + h = 0$$

$$\frac{1}{2} g t_c^2 = h$$

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{10}} = 0,64 \text{ s}$$

7- السرعة التي تصل بها الكرة الى النقطة C :

لدينا :

$$V_C^2 = V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2 \quad \text{أي} \quad \vec{V}_C = \vec{V}_{Cx} + \vec{V}_{Cy}$$

$$V_C = \sqrt{V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2} \quad \text{مع} \quad V_{Cx} = V_B \quad \text{و} \quad V_{Cy} = g \cdot t_c$$

$$V_C = \sqrt{V_B^2 + (g t_c)^2} = \sqrt{8^2 + (10 \times 0,64)^2} = 10,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$