

EXERCICES D'ARITHMÉTIQUES

Ex 1 q, p deux entiers naturels non nuls

1) Montrer que si $p \wedge q = 1$ alors $p \wedge (p+q) = 1$ et $p \wedge q(p+q) = 1$

2) x, y deux entiers de \mathbb{N}^* tels que : (1) $x(43-x) = y(x+y)$

On pose $y = db$; $x = da$ et $a \wedge b = 1$

a) Montrer que $a(43-ad) = bd(a+b)$

b) Montrer que $a \mid d$ puis on pose $d = ac$

c) Prouver que $c(a^2 + ab + b^2) = 43$ en déduire que $c = 1$

d) Déduire les solutions de l'équation (1)

Ex 2 On considère dans \mathbb{N}^2 l'équation (E) $x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$

Soit (x, y) un élément de \mathbb{N}^2 et on pose $x = da$; $y = db$ et $d = x \wedge y$

1) on suppose que (x, y) est solution de (E).

a) vérifier que $a^2(d^2a^2 + 7) = b(2a + b)$

b) déduire qu'il existe un entier k tel que $2a + b = ka^2$ et $d^2a^2 + 7 = kb$

c) prouver que $a = 1$ d) en déduire que $(b+1)^2 = d^2 + 8$

2) résoudre dans \mathbb{N}^2 l'équation (E)

Ex 3 1) a) déterminer suivant la parité de n le nombre $(n^2 + 1) \wedge (n + 1)$

b) montrer que $n^2 + 1$ n'est pas un carré parfait

2) soient n ; a et b des entiers naturels tels que $a \wedge b = 1$ et $a(n^2 + 1) = b^2(n + 1)$

a) montrer que $a \wedge b^2 = 1$ en déduire que $a \leq n$ et $b \leq n$

b) montrer que $(n^2 + 1) \wedge (n + 1) = 2$

c) on pose $n + 1 = 2q$ et $n^2 + 1 = 2p$ avec $p \wedge q = 1$ montrer que $a = q$ et $b^2 = p$

d) on suppose que $b = a + 1$ déterminer les entiers n ; b et a

Ex 4 1) soit n un entier de \mathbb{N}^* .

a) montrer que si n est impair alors $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$

- b) montrer que si n est pair alors $n^2 \equiv 0 \pmod{8}$ ou $n^2 \equiv 4 \pmod{8}$
- 2) soient a ; b et c trois entiers naturels non nuls et impairs
- a) montrer que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas un carré parfait
- b) montrer que $2(ab + bc + ca) \equiv 6 \pmod{8}$
- c) en déduire que $2(ab + bc + ca)$ n'est pas un carré parfait
- d) montrer que $ab + bc + ca$ n'est pas un carré parfait

Ex 5

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E) $x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$

- 1) soit (x, y) une solution de (E) et on pose $y = bd$; $x = ad$ et $a \wedge b = 1$
- a) vérifier que $db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$
- b) en déduire que $b = 1$
- c) montrer que $a \neq 1$ et $(a-1) \mid (a+1)$
- d) déduire que $a = 2$ ou $a = 3$
- 2) résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E)

Ex 6

(I) On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) : $35u - 96v = 1$

- 1) vérifier que $(11, 4)$ est une solution de (E)
- 2) en déduire l'ensemble de solutions de (E)

(II) On considère dans \mathbb{N} l'équation (F) : $x^{35} \equiv 2 \pmod{97}$

- 1) soit x une solution de (F)
- a) montrer que 97 est un nombre premier puis x et 97 sont premiers entre eux
- b) montrer que $x^{96} \equiv 1 \pmod{97}$ c) montrer que $x \equiv 2^{11} \pmod{97}$
- 2) soit x un entier naturel . montrer que si $x \equiv 2^{11} \pmod{97}$ alors x est solution de (F)
- 3) déduire l'ensemble de solutions de (F) (on donne $2^{11} \equiv 11 \pmod{97}$)

Ex 7

Soit n un entier de \mathbb{N}^* . on pose $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

- 1) a) vérifier que a_n est pair pour tout entier n de \mathbb{N}^*

b) déterminer les entiers naturels n vérifiant $a_n \equiv 0 \pmod{3}$

2) soit p un entier premier tel que $p > 3$

a) montrer que $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et $6^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

b) en déduire que p divise a_{p-2}

3) montrer que pour tout entier naturel premier q il existe un entier n tel que $a_n \wedge q = q$

Ex 8

Soit p un entier premier supérieur à 2

1) soit a un entier naturel tel que $a \wedge p = 1$ et on pose $A = \{k \in \mathbb{N}^* / a^k \equiv 1 \pmod{p}\}$

a) vérifier que $p-1 \in A$

b) soit n_0 le plus petit élément de A . n un entier naturel et r le reste de la division de n par n_0

☞ montrer que $a^n \equiv a^r \pmod{p}$ ☞ en déduire que : $(\forall n \in A) n_0 | n$

3) On pose $U_n = \underbrace{1111 \dots 11}_n$

a) vérifier que $9U_n = 10^n - 1$ b) montrer que $6 | n \Leftrightarrow 7 | U_n$

c) en déduire le plus petit entier divisible par 7 et s'écrit uniquement avec le chiffre 1 en base 10

Ex 9

On considère dans \mathbb{Z} le système $(S) \begin{cases} x \equiv a \pmod{p} \\ x \equiv b \pmod{q} \end{cases}$ où a et b des entiers relatifs

et p et q deux entiers naturels tels que $p \wedge q = 1$

1) a) vérifier qu'il existe un couple (u_0, v_0) de \mathbb{N}^2 tel que $pu_0 - qv_0 = 1$

b) montrer que $x_0 = bp_0 - aq_0$ est solution de (S)

2) soit x une solution de (S) montrer que pq divise $x - x_0$.

3) soit x un entier tel que pq divise $x - x_0$ montrer que x est solution de (S) .

4) déduire les solutions de (S) .

5) résoudre dans \mathbb{Z} le système $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{8} \\ x \equiv 3 \pmod{13} \end{cases}$