

**TD : L'ARITHMETIQUE**

**Exercice1** : montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;

1)  $(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$  , 2)  $5n+3 \wedge (2n+1) = 1$   
 3)  $n+2 \wedge (n^2+2n-1) = 1$

**Exercice2** : Montrons que :  $360 \wedge 84 = 12$  et déterminer  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que :  
 $360u + 84v = 12$

**Exercice3** : Considérons dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E):  $17x + 36y = 1$  et déterminons une solution particulière de (E).

**Exercice4** : résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation suivante : (E)  $7(x-2) = 3(y+1)$

**Exercice5** : déterminer l'entier naturel  $n$

tel que :  $\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N}$

**Exercice6**: 1) Montrer que :  $\forall a \in \mathbb{Z}^*$  et  $\forall b \in \mathbb{Z}^*$

on a :  $a \wedge b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a \wedge (a+b) = 1 \\ b \wedge (a+b) = 1 \\ a \wedge b(a+b) = 1 \\ (a+b) \wedge ab = 1 \end{cases}$

**Exercice7** : Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$   
 $(2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$

**Exercice8** : Considérons l'équation :

(E):  $756x - 245y = 14$   
 1- Montrer l'équation (E) admet une solution.  
 2- Déterminer une solution particulière de (E)  
 3- Résoudre l'équation (E)

**Exercice9** : déterminer dans  $\mathbb{N}^2$  les couples

$(x; y) / \begin{cases} x+y=48 \\ x \wedge y=4 \end{cases}$  avec  $x \leq y$

**Exercice10**: résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système

suisant:  $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$

**Exercice11**: montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :

$\begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases}$

**Exercice12**: résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation suivante: (E)  $5x - 3y = 1$

**Exercice13** : Montrons que :  $(\forall n \geq 2) : n^5 \equiv n[30]$

**Exercice14** :

1) Montrer pour tout entier naturel  $n$ , non nul :  $n^3 - n$  est divisible par 3.

2) Soit  $p$  un nombre premier différent de 2,

démontrer que  $N = \sum_{k=0}^{p-2} 2^k$  est divisible par  $p$ .

**Exercice15** : Le corollaire du théorème de Fermat affirme :

Pour tout entier naturel  $a$  et tout nombre Premier  $p$ , on a:  $a^p \equiv a[p]$

La réciproque est-elle vraie ?

C'est à dire si pour tout entier naturel  $a$ , on a  $a^p \equiv a[p]$  (avec  $p$  entier naturel supérieur ou égal à 2) alors a-t-on  $p$  premier ?

On se propose de donner un contre-exemple.

- Décomposer 561 en produit de facteurs premiers.
- Démontrer que si  $x$  est un entier alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x^n - 1)$  est un multiple de  $(x - 1)$
- Démontrer que  $a^{561} - a$  est divisible par 3 puis par 11, puis par 17.
- En déduire que pour tout entier naturel  $a$  :  $a^{561} - a \equiv 0[561]$

**Exercice 16**: soit  $p$  un nombre premier positif et

$a \in \mathbb{N}^*$  et  $p \wedge a = 1$  on pose  $F_p(a) = \frac{a^{p-1} - 1}{p}$

- verifier que :  $F_p(a) \in \mathbb{N}$
- soit  $b \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $p \wedge b = 1$   
 Démontrer que :  $F_p(ab) \equiv F_p(a) + F_p(b)[p]$

**Exercice17** : soit  $n \in \mathbb{Z}$  on pose :

$u_n = 5n^7 + 7n^5 + 23n$

- Démontrer que :  $u_n \equiv 0[5]$
- Démontrer que :  $u_n \equiv 0[7]$
- en déduire que :  $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$

**Exercice18** : Considérons dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E):  $x^4 + 781 = 3y^4$

- monter que :  $\forall x \in \mathbb{Z} : x^4 \equiv 1[5]$  ou  $x^4 \equiv 0[5]$
- monter que :  $\forall x \in \mathbb{Z} : x^4 + 781 \equiv 2[5]$   
 Ou  $x^4 + 781 \equiv 1[5]$

3) en déduire les solutions de l'équation (E)

**Exercice19** : soit dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation suivante:

$$(E) : 36x - 25y = 5$$

1) montrer que si  $(x; y)$  est une solution de l'équation (E) alors  $x$  est un multiple de 5

2) déterminer une solution particulière de l'équation (E) et résoudre (E)

3) soit  $(x; y)$  une solution de l'équation (E)

Et  $x \wedge y = d$ . Déterminer les valeurs possibles de  $d$  et Déterminer les solutions  $(x; y)$  de (E) tel que  $x \wedge y = 1$

**Exercice20**: on pose  $A = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$

1) soit  $a \in A$  discuter suivant  $a$  le nombre de solutions de l'équation : (E)  $x^2 = a$  dans  $A$

2) soient  $p$  et  $q$  deux éléments de  $A$

On considère l'équation : (F)  $x^2 - 2px + q = \bar{0}$

Montrer que l'équation : (E) admet une solution

ssi  $p^2 - q$  appartient à un ensemble  $B$  à déterminer

3) application :

a) résoudre dans  $A$  l'équation:  $x^4 + 3x^2 + 4 = \bar{0}$  (G)

b) déterminer les nombres entiers naturels  $b$

Tels que : 11 divise  $10304(b)$

**Exercice21** : On suppose qu'il existe des entiers naturels non nuls  $m$ ,  $n$  et  $a$  tels que:

$$(4m + 3)(4n + 3) = 4a^2 + 1$$

1) Soit  $p$  un nombre premier quelconque divisant  $4m + 3$ .

Montrer que  $p$  est impair et que :

$$(2a)^p - 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} [p]$$

2) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que :  $p \equiv 1 [4]$

3. En utilisant la décomposition de  $4m + 3$  en facteurs premiers obtenir une contradiction

**Exercice22** : Démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n$  on a  $N = n^{13} - n$  est divisible par 13; 7; 5; 3 et 2.

**Exercice23** : Soit Le nombre  $n = \overline{2987}_{(10)}$

Écrire  $n$  dans la base 6 :

**Exercice24** : soit  $N = \overline{dcba}_{(10)}$  un entier naturel

montrer que :  $N \equiv a - b + c - d [11]$

**Exercice25** : calculer :

$$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)}$$

**Exercice26**: calculer

$$1) \overline{327}_{(8)} \times \overline{56}_{(8)} \quad 2) \overline{432}_{(5)} \times \overline{134}_{(5)}$$

**Exercice27** : effectuer dans la base 9

$$\overline{6432}_{(7)} \times \overline{54}_{(8)}$$

**Exercice28** : montrer que

$$1) x \equiv 0 [5] \Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ ou } a_0 = 5$$

$$2) x \equiv 0 [25] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{0, 25, 50, 75\}$$

$$3) x \equiv 0 [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0 [3]$$

$$4) x \equiv 0 [9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0 [9]$$

$$5) x \equiv 0 [11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i \equiv 0 [11]$$

$$6) x \equiv 0 [4] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \equiv 0 [4]$$

**Exercice29** : Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$$

$$\text{où } (a_n; b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

Montrer que :  $a_n \wedge b_n = 1$

**Exercice30 : 1)** Montrer que  $\forall (k; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1} \quad \text{et} \quad (n+1) C_{2n}^{n-1} = n C_{2n}^n$$

**2)** Montrer que  $\forall (k; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$k \wedge n = 1 \Rightarrow \frac{n}{C_n^k}$$

**3)** Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n+1 \mid C_{2n}^n$

**Exercice 31** : Pour  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $F_n = 2^{2^n} + 1$

(Nombres de Fermat). Montrer que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

**Exercice 32** :

$$1) \text{ Montrer que } \forall n \in \mathbb{Z}, \frac{6}{5n^3 + n}$$

$$2) \text{ Montrer que } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{7}{4^{2^n} + 2^{2^n} + 1}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs

et exercices

Que l'on devient un mathématicien