

Exercice 1

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos x}{x + \sin x} & ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{2} E\left(\frac{1}{2x}\right) & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

1) montrer que f est dérivable à droite de $a = 0$

2) la fonction f est-elle dérivable en $a = 0$?

☞ étudier la dérivabilité de $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+4} - 1}{\sqrt{x+1}}$ au point $x_0 = 4$

☞ étudier la dérivabilité de $f(x) = \sin^2 x E\left(\frac{x}{2}\right)$ et $f(0) = 0$ en $x_0 = 0$

Exercice 2

1) a) en utilisant le théorème des accroissement finis montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$$

b) déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2}$

2) utiliser le théorème des accroissement finis et montrer que

$$(\forall x > 1) \quad \arctan(x+1) - \arctan x \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \arctan x - \arctan(x-1)$$

3) a) utiliser le théorème des accroissement finis et montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad \sin x \leq x$$

b) démontrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

4) en utilisant le théorème des accroissement finis calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x^{n-1}} (\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x})$$

Exercice 3

soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \arctan(\sqrt{x^2+1} - x)$

1) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2+1} - x \geq 0$

b) exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$ que peut-on déduire ?

2) montrer que f est dérivable \mathbb{R} puis calculer $f'(x)$

3) en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \arctan(\sqrt{x^2+1} - x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan x$

Exercice 4

On considère la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x) = 4x(\pi - x) - \pi \sin^2 x$

- 1) montrer que F est deux fois dérivable et que $F''(x) = -2(4 + \pi \cos 2x)$
- 2) étudier le sens de variation de F' déduire le signe de $F'(x)$
- 3) en déduire que $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \sin^2 x \leq \frac{4}{\pi} x(\pi - x)$

Exercice 5

Soit h la fonction définie sur $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

- 1) montrer que h est une bijection de D vers J à déterminer
- 2) montrer que h^{-1} est dérivable sur J et on a $(\forall x \in J) (h^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$
- 3) en déduire que $(\forall x \in J) h^{-1}(x) = 2 \arctan(x) - \frac{\pi}{2}$

Exercice 6

G est la fonction définie sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $G(x) = \sin x$

- 1) montrer que G est bijective de I vers J que l'on déterminera
 - 2) montrer que G^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$ et que $(G^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 - 3) on pose $h(x) = 2G^{-1}(\sqrt{x}) - G^{-1}(2x-1)$
- a) montrer que le domaine de h est $D = [0, 1]$
- b) montrer que h est dérivable sur $]0, 1[$ puis calculer la dérivée $h'(x)$
- c) calculer $G^{-1}(1)$ et déduire que $(\forall x \in [0, 1]) 2G^{-1}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} + G^{-1}(2x-1)$

Exercice 7

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

- 1) montrer que $(\exists c \in [a, b]) 2f(c) = f(a) + f(b)$
- 2) on pose $g(x) = f(x) - f(c)$ pour tout x de $[a, b]$ montrer que $(\exists \alpha \in [a, b]) g(\alpha) = 0$
- 3) on suppose que $\alpha \neq c$. déduire que $(\exists \beta \in [a, b]) f'(\beta) = 0$

Exercice 8

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b)$
et $f'(a)f'(b) < 0$ montrer que $(\exists c \in]a, b[) f''(c) = 0$