Groupe scolaire Anisse

2017-2018

Matière: Mathèmatiques
Contrôle N° 1
1 Session

Le 13/10/2017
2 Bac - SM-
Durée: 2h00

Ex 1 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt[3]{x - \operatorname{Arctan} x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1 1) Étudier la continuité de f en 0.

1 2) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right)$ $\operatorname{Arctan} x \leq x$

2 3)a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \leq x - \operatorname{Arctan} x \leq \frac{x^3}{3}$$

1 b) Calculer la limite : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3}$

2 c) Etudier la dérivabilité de la fonction f en 0.

2 4) Étudier les variations de la fonction f

5) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

2 a) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.

1 b) Construire la courbe $\mathscr{C}$ (On donne : $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}} \approx 0,7$)

1 6) Soit g la restriction de la fonction f sur $I = \mathbb{R}_-^*$.

Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathcal{J}$

Ex 2 :

I) Calculer les limites suivantes :

2 $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[5]{x}.\sqrt[15]{x^2}}{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x}} \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

1 II) Montrer que : $2\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{4}{3}\right) = \pi$

2 III) Montrer que pour tout $x \in \left]1;+\infty\right[$:

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2\operatorname{Arctan}(x) - \pi$$

2 IV) Soit f une fonction numérique continue sur $[a,b]$.

Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in \left]a,b\right[$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$$

bonne chance