

2017-2018

Exercice 1:

$\forall m \in \mathbb{C}^*$, $E_m: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \dots (2m+1+i)z + m(m+1+i) = 0$

1 - Vérifier que $z_1 = m$ est une solution de (E_m) :
et déterminer z_2

2 - Mg $|z_1| = |z_2| \iff \text{Im}(m) + \text{Re}(m) = -1$

3 - Soient $A(m)$, $B(m+1+i)$, $C(m-2+2i)$

et $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$

$M \in \mathbb{P} \mapsto M'(z) / z' = 2iz + m - 2im$

a - Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.

b - Mg $f(B) = C$ et en déduire la nature de $f(B)$

4 - Soit $D(m + \frac{2}{3}(1+3i))$

a - Mg B, C et D sont alignées et que $(A)D \perp (BC)$

b - En déduire $|\delta_D - \delta_A| + |\delta_C - \delta_B| = |\delta_B - \delta_A| + |\delta_C - \delta_A|$

Exercice 2:

On considère dans \mathbb{Z} : $29x + 13y = 1 \quad (E)$

1 - Mg (E) admet au moins une solution dans \mathbb{Z}^2

2 - Recherche (E) .

3 - Soit $n \in \mathbb{N} / 10^n = 3 \pmod{13}$

a - Mg $10^{28} \equiv 1 \pmod{29}$

b - Mg $10^{n+1} \equiv 1 \pmod{29}$

c - On pose $d = (n+1) \wedge 28$

Mg $10^d \equiv 1 \pmod{29}$ et que $d = 28$

Exercice 3:

$g(x) = \frac{2x}{x + \ln(x+1)}$, $\forall x > 0$; et $g(0) = 1$

1 - Mg g est continue en 0 à droite.

2 - Mg $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$, $\forall x > 0$

3 - Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ et dresser le TV de g .

4 - $\forall x > 0$ on pose $G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt$ et $G(0) = 0$

a - Étudier la dérivabilité de G en 0 à droite et interpréter le résultat obtenu.

b - Mg G est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $G'(x)$,

c - Déterminer les variations de G .

5 - On pose $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k + n \ln(k + \frac{k}{n})}$, $n \in \mathbb{N}^*$

a - calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ en fonction de G

b - On pose $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l$

Vérifier que $\frac{1}{2} \leq l < 1$.