Institut Scolaire les Palmiers	Contrôle Continu 1 (S_2) 05 Février 2020	2ème bac SM Durée : 2 Heures

Exercice 1 (13,5 points)

I) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(2-x)e^{x}+30$

0,75 1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ (justifier votre réponse)

0,75 b) Calculer $g'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de g.

0,5 2) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution α dans $]3;4[$

0,5 b) Dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{e^{x}+15}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,75 1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

0,5 b) Déterminer les branches infinies de la courbe (C).

1 2) a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=\dfrac{x\,g(x)}{(e^{x}+15)^2}$

0,5 b) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{\alpha(\alpha-2)}{15}$

1 c) Dresser le tableau de variations de f.

1 d) Construire la courbe (C) (On prend $\alpha\simeq 3,2$ et $f(\alpha)\simeq 0,25$).

III) Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\displaystyle\int_{x}^{2x}\frac{t^2}{e^{|t|}+15}\,dt$

0,75 1) a) Donner suivant les valeurs de x le signe de $F(x)$.

0,75 b) Etudier la parité de la fonction F

1 2) a) Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[)\qquad \dfrac{7x^3}{3(e^{2x}+15)}\leq F(x)\leq\dfrac{7x^3}{3(e^{x}+15)}$

0,25 b) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

1 3) a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout x de $\mathbb{R}^+$:

$$F'(x)=\frac{-x^2(e^{x}+7)(e^{x}-15)}{(e^{2x}+15)(e^{x}+15)}.$$

0,5 b) Dresser le tableau de variations de F sur $[0;+\infty[$.

IV) On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{e^{t}+15}\,dt$.

1 1) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq1}$ puis déduire qu'elle est convergente

1 2) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ 0\leq u_n\leq\dfrac{1}{15(n+1)}$ puis Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 (6,5 points)

Le plan Complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soient les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 1-2i$.

On pose pour tout z de $\mathbb{C} - \{1\}$: $Z = \dfrac{z-1+2i}{z-1}$.

0,5 1) a) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|Z| = 1$

1 b) Montrer que : $(Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 1)$

0,5 c) Déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que les points A, B et M sont alignés

1 2°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $Z = z$.

b). Soit le point C d'affixe $z_C = -i$, déterminer l'affixe du

0,5 point D image de A par l'homothétie h de centre C et de rapport 2

1 c). Calculer $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_C}$ puis déduire la nature du triangle BCD.

d) Soit le point E d'affixe $3-i$. Montrer que les points B, C, D et E

1 sont cocycliques.

3). On pose $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in]0, \pi[$. Ecrire sous forme trigonométrique

1 le nombre $Z - 1$.