| Institut Scolaire les Palmiers | Contrôle Continu 1 ($S_1$) 25 Septembre 2019 | 2ème bac SM Durée : 2 Heures |
|---|---|---|

## Exercice 1 (5,5 points)

Soit la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{\sin x+1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$

0,5 1) a) Montrer que $D_f=\mathbb{R}^*$.

1,25 b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus

0,5 2) a) Montrer que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2}=0$.

1,25 b) Déduire $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Prouver que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x)=xf(x)$

0,5 est prolongeable par continuité en zéro.

0,5 4) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$, l'équation $f(x)=1$.

1 5) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$ $\dfrac{|x|-1}{\sqrt{x^2+1}-1}\leq f(x)\leq \dfrac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

## Exercice 2 (3 points)

1) $f$ et $g$ sont deux fonctions définies et continues sur $[0;1]$ telles que :

$f(0)=g(0)$ et $f(1)=g(1)$ et $f([0;1])\subset\,]0;1[$

1,5 Montrer que : $(\exists c\in\,]0;1[)\,/\,2020f(c)=2019g(c)+c$

2) $f$ est une fonction continue sur $[19;20]$ telle que $f(19)<0$.

1,5 Démontrer que l'équation $f(x)=\dfrac{x-19}{x-20}$ admet au moins une solution $\alpha$ dans $]19;20[$.

## Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction $f$ définie sur $]-\frac{\pi}{2};+\infty[$ par : $f(0)=\frac{3}{8}$ et

$f(x)=\dfrac{x\tan x+\cos x-1}{x^2}-\dfrac{1}{8}$ si $x<0$ et $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+16}-6}{x}$ si $x>0$

1,5 1) a) Montrer que $f$ est continue en zéro.

1 b) Montrer que $f$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2},+\infty[$

1 c) Montrer que $(\exists\alpha\in[0;20])\,/\,f(\alpha)=\frac{1}{4}$ (On donne $f(20)\simeq 0{,}245$)

0,5 2) a) Montrer que $(\forall x\in\,]0,+\infty[)$ $f(x)>0$

1 b) Montrer que : $(\exists(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2)(\forall x\in[1;2])$ $ax+6\leq\sqrt{x+4}+\sqrt{x+16}\leq bx+6$

## Exercice 4 (6,5 points)

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+1}\left(a + E\left(1/x^2\right)\right) ; x \neq 0 \\ f(0) = a - 1 \end{cases}$
où $a \in \mathbb{R}^*$.

2 1) a) Donner les expressions simplifiées de $f(x)$ sur chacun des intervalles $]1 ; +\infty[$ et $\left]\frac{1}{\sqrt{2}} ; 1\right[$.

0,5 b) $f$ est-elle continue en 1 ?

1 2) a) Montrer que $(\forall x \in ]0, +\infty[)$ $\dfrac{x^2}{x^2+1}\left(1+(a-1)x^2\right) < f(x) \leq \dfrac{x^2}{1+x^2}\left(1+ax^2\right)$

0,5 b) Déduire la valeur de $a$ pour que $f$ soit continue en zéro.

3) On prend $a = 1$ et on considère la fonction $g$ restriction de $f$ sur l'intervalle $I = ]1, +\infty[$

0,25 a) Vérifier que $(\forall x \in I)$ $g(x) = \dfrac{x^4}{1+x^2}$

0,75 b) Calculer $g'(x)$ pour $x \in I$ puis déduire que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on donnera

0,5 c) Déduire que l'équation $g(x) = \dfrac{2019}{2020}$ admet une seule solution dans $I$.

1 d) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.