

Exercice 1 (2,5 points)

Soit la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par $f(x) = \text{Arctan } x - \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

- 1 1) a) Montrer que f est dérivable sur I puis calculer $f'(x)$.
 0,5 b) Démontrer que $(\forall x \in I) f(x) = \frac{\pi}{4}$.
 1 2) Démontrer de ce qui précède la valeur de $\text{Arctan}\left(\frac{2020}{2018}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{2019}\right)$.

Exercice 2 (10 points)

I) Soit la fonction g définie sur $I = [-2; +\infty[$ par: $g(x) = 4x\sqrt{x+2} - 1$

- 1 1) a) Dresser le tableau de variations de la fonction g .
 15 b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans I puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.
 1 c) En utilisant la méthode de dichotomie, donner l'encadrement de α d'amplitude 0,25.
 0,5 2) Dresser le tableau de signes de la fonction g .

II) On considère la fonction f définie sur I par: $f(x) = 2 + \sqrt{x+2} - x^2$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C_f) .
 1 b) Étudier la dérivabilité de f à droite en -2 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
 0,5 2) a) Montrer que $(\forall x \in]-2; +\infty[) f'(x) = \frac{-g(x)}{2\sqrt{x+2}}$.
 0,5 b) Calculer $f'(\alpha)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
 1,5 c) Dresser le tableau de variations de f et montrer que $f(\alpha) = \frac{-4\alpha^3 + 8\alpha + 1}{4\alpha}$.
 1,5 d) Construire la courbe (C_f) (on donne $\alpha \approx 0,16$ et $f(\alpha) = 3/4$; $f(1) = 0$; $f(-1) = 3$).

Exercice 3 (7,5 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par: $f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x}\right)$

- 0,75 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
 0,75 b) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0.

a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout x de $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2(\sqrt[3]{x} - 1)}{3\sqrt[3]{x^2}(1 + (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})^2)}$$

b) Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R}^+ .

c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

d) Donner l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 8.

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on donnera.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $] -\pi/4; \pi/2[$ puis calculer $(g^{-1})'(0)$.

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour x de J .