

Exercice 1 :

On considère l'application φ définie par :

$$\varphi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$M \in \mathbb{P} \longmapsto M' \in \mathbb{P} / Z' = \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{4}\right)Z + \frac{1-2\sqrt{3}}{2}$$

1 - Montrer que $A \in \mathbb{P}$ est le seul point invariant par φ .

2 - Montrer que $AM' = \frac{\sqrt{2}}{2} AM$ et : $(\overline{AM}, \overline{AM'}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

3 - Montrer que le triangle (AM, M') est rectangle en M' .

4 - Expliquer comment situer M' si on connaît le lieu de M dans $(0, \bar{x}, \bar{r})$.

5 - Déterminer la nature de φ .

6 - Déterminer l'image du cercle $\mathcal{C}(0, 1)$ par φ .

7 - On considère la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ définie par $\varphi_1 = \varphi$ et $\varphi_{n+1} = \varphi \circ \varphi_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $M_n = \varphi_n(0)$ et Z_n l'affixe de M_n .

- a - Déterminer Z_1 et vérifier que $M_{n+1} = \varphi(M_n)$
- b - En déduire que $Z_n = -2 \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{4}\right)^n + 2$
- c - Déterminer les valeurs de n pour que $M_n \in \mathcal{D}(\bar{x})$

Exercice 2 :

- 1 - Recherche dans \mathbb{Z}^2 : $11x - 7y = 1$
- 2 - En déduire les solutions de $\begin{cases} x \equiv 1 [11] \\ x \equiv 2 [7] \end{cases} \in \mathbb{Z}$
- 3 - Soient p et q deux nombre premiers pairs.
et $a \in \mathbb{N}^* / pra = 1$ et $qra = 1$
et on considère l'équation : $ax \equiv 1 [pq] \in \mathbb{Z}$
- a - $Mq \equiv 1 [p]$ et $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [q]$
- b - En déduire $x_0 = a^{(p-1)(q-1)-1}$ est une solution de \mathbb{Z} .
- c - $Mq \in \mathbb{Z} \iff ax \equiv a x_0 [pq]$
- d - En déduire les solutions de \mathbb{Z} .
- e - Recherche dans \mathbb{Z} ; $10x \equiv 1 [35]$