2015-14	Contrôle 3	2éme SM

EXERCICE 1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\quad Z^2+(6+5i)Z+2+16i=0$

1) a) déterminer les racines carrées du nombre $3-4i$

b) déduire les solutions de (E)

2) le plan (P) est muni d'un R.O.N.D $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les points B, A et C d'affixes respectifs $b=-4-2i \quad ; \quad a=i$

et $c=-2-3i$

a) montrer que ABC est isocèle en C

b) soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ on pose $D=R(A)$ et $R(E)=C$

(i) montrer que l'affixe de E est $Z_E=-5-4i$ puis déterminer d l'affixe du point D

(ii) soit I le milieu du $[AC]$ montrer que $\dfrac{d-Z_E}{Z_I-b}=2i$

En déduire que $(DE)\perp(IB)$ et $DE=2BI$

EXERCICE 2

On définie sur $\mathbb{R}$ la loi T par : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad xTy=a-(a-x)(a-y)$

1) a) montrer que T est commutative ; associative

b) déterminer l'élément neutre de T

c) montrer que $(\mathbb{R}-\{a\},T)$ est un groupe commutatif

2) montrer que $(]-\infty,a[,T)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}-\{a\},T)$

3) soit f l'application définie par :$(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)=a-x$

a) montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R},\times)$ vers $(\mathbb{R},T)$

b) soit x de $\mathbb{R}$ et $n\geq 2$ déterminer en fonction de x et n le nombre $\underbrace{xTxT......Tx}_{n\,fois\,x}$

2015-14	Contrôle 3	2éme SM

EXERCICE 3

(I) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2e^{x}}{\sqrt{1+x^{2}}}$

1) a) calculer les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) étudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$

2) calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f puis donner le tableau de variations

3) prouver que (1) $(\forall t>0)$ $2e^{t}-t-t^{2}>0$

et (2) $(\forall t>0)$ $1+t>\sqrt{1+t^{2}}$

4) en déduire que $(\forall x\geq 0)$ $f(x)>x$

5) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $U_n\geq 1$

b) étudier a monotonie de $(U_n)_n$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

(II) soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$

1) montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$

2) montrer que G est impaire

3) a) montrer que $(\forall x>0)$ $G(x)\geq\dfrac{2\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{\sqrt{1+x^{2}}}$

b) déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=+\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{G(x)}{x}$

4) dresser le tableau de variations de G