Devoir

Exercice 1

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_n = \sum_{p=0}^{p=2n+1} \frac{n}{n^2+p}$

1) montrer que

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 - \frac{2}{n+1} \leq U_n \leq 2 + \frac{2}{n}$

2) a) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \geq \frac{1}{2n}$

b) en déduire $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \leq 2\sqrt{n}$

3) on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} U_k$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) montrer que :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$

b) déterminer la limite $\lim_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 2

Soit $(U_n)_n$ une suite géométrique de raison q

telle que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \neq 0$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ On pose $S = U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_{n-1}$

$P = U_0 U_1 \ldots\ldots U_{n-1}$ et $T = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \ldots\ldots + \frac{1}{U_{n-1}}$

Montrer que $\frac{S}{T} = U_0^2 \; q^{n-1}$ déduire $P^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$

Exercice 3

On considère les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ telles que $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $V_n = \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1) montrer que $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont adjacentes

2) on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

a) montrer que $f_n'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

b) prouver que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad f_{2n+1}(x) \leq \arctan x \leq f_{2n}(x)$

c) déduire la limite commune des suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$

Exercice 4

Soit n un entier supérieur à 3. on considère la fonction $f_n(x) = x^n - n(x-1) - 2$ définie sur $\mathbb{R}^+$

1) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n avec $u_n < 1 < v_n$

2) a) étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

b) étudier la monotonie de $(u_n)_n$ en déduire qu'elle est convergente

c) montrer que $(\forall n \geq 3) \quad : \quad \frac{-2}{n} \leq u_n - 1 \leq \frac{-1}{n}$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) étudier la monotonie de $(v_n)_n$ et déduire qu'elle est convergente

4) a) montrer que $(\forall n \geq 3) \quad v_n > 1 + \frac{1}{n}$ (on donne $(\forall n \geq 3) \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$)

b) démontrer que $(\forall a > 0)(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2} a^2$

c) calculer $f_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ puis déduire $(\forall n \geq 3) \quad v_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$

d) déterminer la limite de la suite $(v_n)_n$