

Exercice 1 (5 points)

① Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur $[0; 1]$ telles que: $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{\pi}{4}$; $g(0) = 0$; $g(1) = 1$ et $(\forall x \in]0; 1[) g'(x) \neq 0$

2 Montrer que: $(\exists \alpha \in]0; 1[) \mid \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \frac{1}{1+g^4(\alpha)}$.

② En utilisant le théorème des accroissements finis, prouver que: $(\forall x \in]0; +\infty[) \frac{x}{1+(x^2+x+1)^2} < \text{Arctan}(x^2+x+1) - \text{Arctan}(x^2+1) < \frac{x}{1+(x^2+1)^2}$

1 Déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 (\text{Arctan}(x^2+x+1) - \text{Arctan}(x^2+1))$

Exercice 2 (15 points)

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par:

$$f(x) = \text{Arctan} \sqrt{x^2-2x} \text{ si } x \leq 0 \text{ et } f(x) = 3x\sqrt{x} + 2x^2 - 8x \text{ si } x > 0$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1 a) Montrer que f est continue sur $]-\infty; +\infty[$

2,5 b) Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en zéro puis interpréter géométriquement les résultats obtenus

1 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

1 d) Déterminer les branches infinies de la courbe (C) au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

1 e) a) Démontrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

1,5 b) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+) f'(x) = 4(\sqrt{x+x-2})$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^+) f'(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$

1,5 c) Déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$ et strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

1 3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution d dans $]2; 3[$ (on donne: $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$ et $\sqrt[3]{3} \approx 1,44$; $d \approx 2,1$)

1,5 b) Construire la courbe (C) .

1 4) a) Montrer que $(\forall x \in [-2; -1]) \mid f'(x) \mid \leq \frac{1}{2}$

0,5 b) Déduire que $(\forall x \in [-2; -1]) \mid f(x) - \pi/3 \mid \leq \frac{1}{2} \mid x+1 \mid$

5) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty; 0]$

0,5 a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}
définie sur un intervalle J que l'on donnera.

1 b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour x de J