

ETUDE DE FONCTIONS

EXERCICE (1)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par : $f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)$

- 1) étudier la dérivabilité de f à droite de 0
- 2) a) calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
b) étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 3) a) montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$
b) étudier les variations de f et dresser sa table de variation
- 4) montrer que f est bijective de \mathbb{R}^+ vers un intervalle I à déterminer
- 5) tracer dans un même repère les courbes (C_f) et $(\Gamma_{f^{-1}})$

EXERCICE (2)

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \arctan\left(x\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}\right) & x^2 \neq 1 \\ f(1) = \frac{\pi}{2} & ; \quad f(-1) = \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

- 1) déterminer le domaine de définition D_f puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) étudier la dérivabilité de f à gauche de 0 et à droite de 1 et -1
- 3) Calculer $f'(x)$ puis donner le tableau de variation de f
- 4) soit g la restriction de la fonction f sur $[-1, 0]$
 - a) Montrer que g est une bijection de $[-1, 0]$ vers un intervalle J que l'on précisera
 - b) exprimer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

EXERCICE (3)

soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} & ; \quad x \geq 2 \\ f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) & ; \quad x < 2 \end{cases}$$

- 1) a) étudier la continuité de f sur \mathbb{R}
b) étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite du point 2
- 2) calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
- 3) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 4) a) calculer la fonction dérivée sur $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$
b) étudier les variations de f et dresser sa table de variation
- 5) soit g la restriction de la fonction f sur $]-\infty, 2[$
 - a) Montrer que g est une bijection de $]-\infty, 2[$ vers un intervalle J que l'on précisera
 - b) exprimer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

ETUDE DE FONCTIONS

EXERCICE (4)

on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \arctan \sqrt{x+2} & ; \quad x \geq -2 \\ f(x) = x+2 - \sqrt{x^2+2x} & ; \quad x < -2 \end{cases}$$

- 1) a) montrer que f est continue au point -2
 b) étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite du point -2
- 2) a) calculer la limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 b) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)
- 3) a) calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, -2[$ et $]-2, +\infty[$
 b) étudier les variations de f et dresser sa table de variation
- 4) a) montrer que $(\forall x \in]-\infty, -2[) f(x) \geq 2x + 3$
 b) tracer la courbe (C_f)
- 5) soit g la restriction de la fonction f sur $]-\infty, -2[$
 a) Montrer que g est une bijection de $]-\infty, -2[$ vers un intervalle J à déterminer
 b) calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J
 c) tracer dans le repère précédant la courbe de la fonction réciproque g^{-1}
- 6) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout n de \mathbb{N}
 a) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $[1, 2]$
 b) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \arctan x \leq x$
 c) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 < U_n \leq 2$
 d) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$ puis déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite

EXERCICE (5)

I] on considère la fonction h définie sur $]-\infty, 0[$ par : $h(x) = 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x-1}{x^2+1}$

- 1) calculer $h'(x)$ et montrer que h est strictement décroissante
- 2) déduire que $(\forall x < 0) h(x) < 0$
- 3) montrer que $(\forall x < 0) x < \arctan x < \frac{x}{1+x^2}$

II] soit f la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ETUDE DE FONCTIONS

- 1) a) montrer que f est continue à gauche de 0
 b) étudier la dérivabilité de f à gauche du point 0
- 2) a) calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$
 b) étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$
- 3) montrer que $(\forall x < 0) f'(x) = (x-1)h(x)$ puis dresser le tableau de variation de f
- 4) tracer la courbe (C_f)
 (on donne (C_f) coupe la droite $(\Delta)y = x - 2$ en un point d'abscisse $\alpha \approx -0,5$
 Et (C_f) est situer au dessous de (Δ) dans $] -\infty; \alpha [$)

EXERCICE (6)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x+1} - \text{Arc tan}(\sqrt{x})$

- 1) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) étudier le sens de variation de la fonction f
- 3) on considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{\text{Arc tan } \sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$
 - a) déterminer D_g
 - b) déterminer les limites de g aux bornes de D_g
 - c) étudier la dérivabilité de g à droite de 0 puis donner une interprétation géométrique du résultat
 - d) calculer $g'(x)$ et étudier les variations de la fonction g
- 5) soit h la restriction de g sur $[0; 1[$. montrer que h est une bijection de $[0; 1[$ vers un intervalle à déterminer
- 6) tracer les courbes (C_g) et $(C_{h^{-1}})$

Etudier les fonctions :

- 1) $f(x) = \sqrt{1+x^2} \arctan x$
- 2) $f(x) = |x-1| + \arctan |x|$
- 3) $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{1-x}}\right)$ si $x < 1$ et $f(1) = \frac{\pi}{2}$
- 4) $f(x) = x \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$
- 5) $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$