Fiche *methodes* :*Etude de* fonctions

1. Asymptotes

Asymptote verticale

La droite $x = a$ est dite **asymptote verticale** (A. V.) de la fonction f si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty \text{)} \qquad \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty \text{)}$$

Une A. V. ne peut exister que si la fonction f n'est pas définie en $x = a$.

Asymptote affine

La droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote affine** (A. A.) de la courbe représentative de la fonction f si

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx+h)] = 0 \qquad \text{(propriété analogue en } -\infty \text{)}$$

Les valeurs de m et h sont calculées avec les formules suivantes :

Remarque
Si $m = 0$, l'asymptote est horizontale.

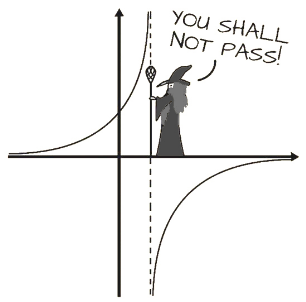
$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad h = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] \qquad \text{(idem en } -\infty \text{)}$$

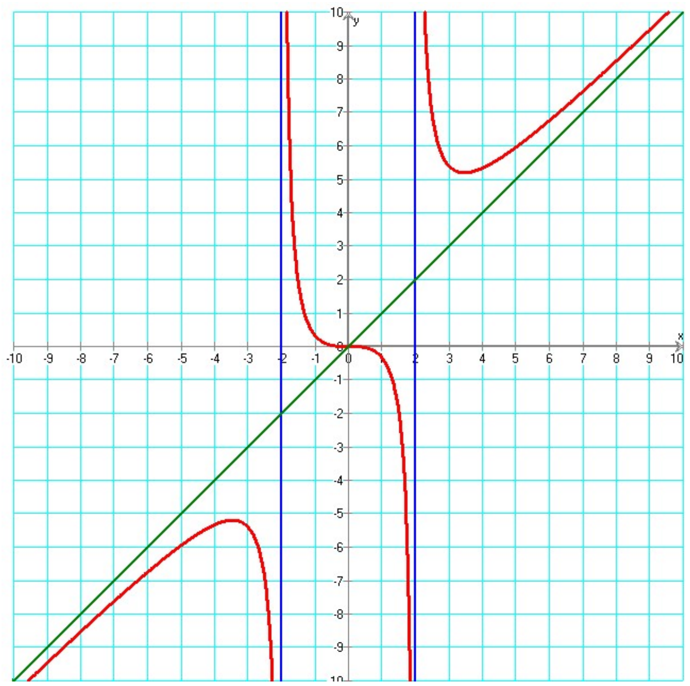
Remarque : Si m tend vers l'infini, alors il n'y a pas d'asymptote affine. Inutile donc d'essayer de calculer h.

C'est en particulier le cas avec des fonctions exponentielles ou la fonction arctan(x).

Attention ! L'asymptote affine n'est pas forcément la même en $+\infty$ et en $-\infty$. Il faut donc étudier les deux cas.

Ci-dessous, le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$, qui possède deux asymptotes verticales (en bleu) et une asymptote affine (en vert).





Remarquez que la fonction n'est pas définie en $x = -2$ et $x = 2$.

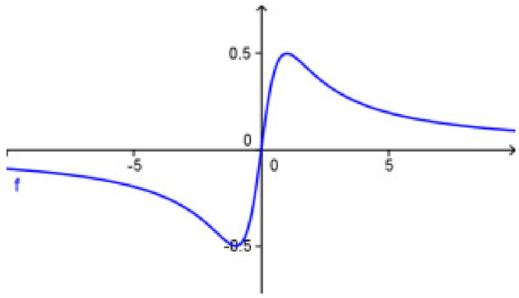
Fiche *methodes* : *Etude de* fonctions

Cinq exemples un peu particuliers

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

une asymptote horizontale : $y=0$

la courbe coupe l'asymptote.

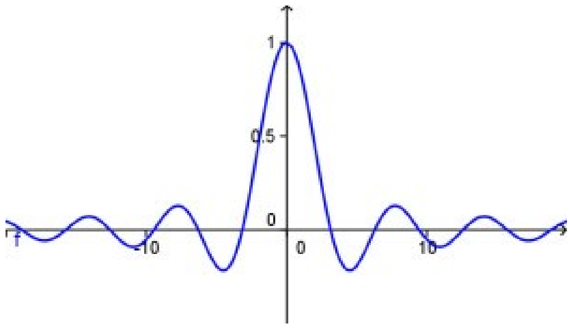


$f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$

une asymptote horizontale : $y=0$

elle est coupée une infinité de fois par la fonction.

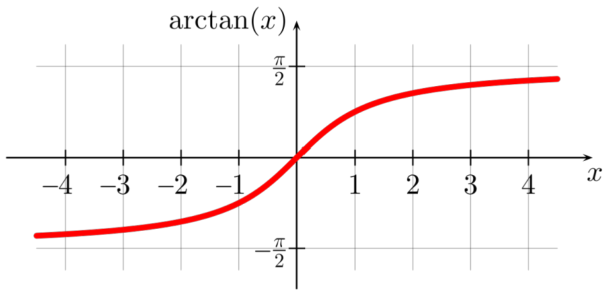
il y a un trou en $x=0$.



$f(x)=\arctan(x)$

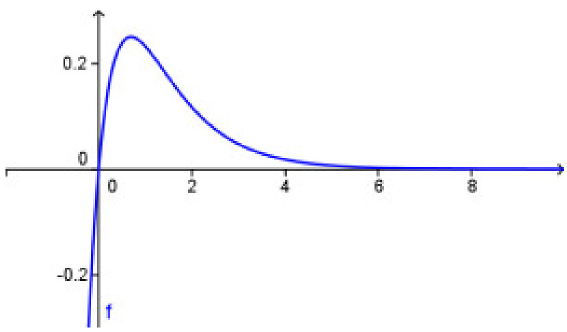
vers $+\infty$, une asymptote horizontale : $y=\dfrac{\pi}{2}$

vers $-\infty$, une autre asymptote horizontale : $y=-\dfrac{\pi}{2}$



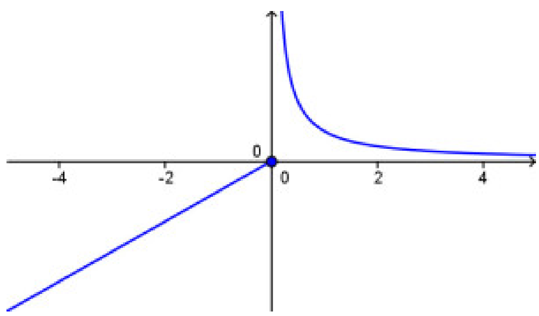
$f(x)=-e^{-2x}+e^{-x}$

une asymptote horizontale vers $+\infty$, mais pas d'asymptote vers $-\infty$.



$f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

une asymptote verticale en $x=0$. Pourtant la fonction est définie en $x=0$...



2. Méthode

L'étude d'une fonction f comprend huit étapes. Vous trouverez au § 5.3 un exemple qui vous servira d'aide-mémoire.

1. Ensemble de définition

Déterminer le domaine D où la fonction $f(x)$ est définie.

2. Parité

Voir si la fonction est paire, impaire, périodique ou rien du tout. Cela permet, si la fonction est « agréable », de gagner du temps par la suite.
La fonction f est paire si $f(x) = f(-x)$, et impaire si $f(x) = -f(-x)$, $\forall\ x$.

3. Signe de la fonction

Chercher les zéros, puis faire un tableau pour voir où la fonction est négative, positive ou nulle.

4. Asymptotes verticales, trous

Calculer la ou les asymptotes verticales et trouver les éventuels trous.

5. Asymptotes affines

Calculer la ou les asymptotes affines et, si demandé, trouver le positionnement de la courbe par rapport à ces asymptotes.

6. Croissance et points critiques

Un point c de l'ensemble de définition est un **point critique** si $f'(c) = 0$ ou si $f'(c)$ n'existe pas.

Calculer la dérivée et chercher ses zéros. Faire un tableau pour voir comment la fonction croît. Identifier les minima, les maxima et les points d'inflexion à tangente horizontale.

7. Concavité et points d'inflexion

Chercher la concavité de la fonction et les points d'inflexion. Pour cela, calculer la dérivée seconde si elle n'est pas trop compliquée (cette méthode est la seule qui garantit de trouver tous les points d'inflexion). Faire un tableau. Calculer les pentes des tangentes aux points d'inflexion.

8. Représentation graphique

Dessiner la courbe en utilisant les renseignements glanés aux étapes 1 à 7.
Faire un grand dessin où l'on représente le graphe de la fonction, les asymptotes et les points particuliers.

3. Un exemple complet

Étudions la fonction $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

1. Ensemble de définition

L'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Parité

Si la fonction est paire ou impaire, on peut alors n'étudier que le côté positif. Le côté négatif se déduira du côté positif.

f est paire si $f(x) = f(-x)$. Est-ce le cas ?

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x-1)^2}=\frac{-x^3}{(x+1)^2}\neq f(x)\ .$$

f n'est donc **pas paire**.

f est impaire si $f(x) = -f(-x)$. Est-ce le cas ?

$$-f(-x)=-\frac{(-x)^3}{(x+1)^2}=\frac{x^3}{(x+1)^2}\neq f(x)\ .$$

f n'est donc **pas impaire**.

En fait, puisque le domaine de définition D n'est pas symétrique, il est évident que la fonction ne peut être ni paire, ni impaire.

3. Signe de la fonction

Cherchons d'abord le(s) zéro(s) de f :

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0 .$$

Le signe de la fonction est donné par le tableau suivant (dans la première ligne, on met les valeurs de x trouvées aux étapes 1 et 3) :

x	< 0	0	$]0 ; 1[$	1	> 1
x^3	–	0	+		+
$(x-1)^2$	+	+	+		+
$f(x)$	–	0	+		+

4. Asymptotes verticales (A.V.), trous

On peut s'aider du tableau de signes de l'étape 3 pour déterminer le signe de l'infini.

Par exemple, on a vu que $\frac{\sin(x)}{x}$ a un trou en $x = 0$.

Les asymptotes verticales, s'il y en a, se trouvent aux abscisses trouvées à l'étape 1. Il s'agit de vérifier que ce sont bien des asymptotes verticales et non pas des trous.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$$

Si on avait un trou, on trouverait que la limite à gauche est égale à la limite à droite et que ces limites seraient égales à un **nombre**.

5. Asymptotes affines (A.A.)

Une asymptote affine est de la forme $y = m{\cdot}x + h$. On va analyser ce qui se passe en $-\infty$ et en $+\infty$.

Du côté de $+\infty$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$h=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

Du côté de $+\infty$, l' A.A. est donc $y = x + 2$.

Du côté de $-\infty$ Idem que pour $+\infty$ (le signe ne change rien).

6. Croissance et points critiques

$f'(x)=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ s'annule en 0 et 3.

Les points du graphe dont les abscisses sont des points critiques de f sont donc $(0 ; 0)$ et $(3 ; \frac{27}{4})$.

La croissance de f est donnée par le tableau suivant (dans la première ligne, on met les valeurs de x trouvées aux étapes 1 et 6) :

x		0		1		3	
$f'(x)$	+	0	+		–	0	+
$f(x)$	↗	0	↗		↘	$\frac{27}{4}$	↗
		pt. d'infl. à tg. hor.				minimum	

Fiche *methodes* :*Etude de* fonctions

7. Concavité et points d'inflexion

$f''(x)=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$ s'annule en 0.

La concavité de f est donnée par le tableau suivant (dans la première ligne, on met les valeurs de x trouvées aux étapes 1 et 7) :

x		0		1	
$f''(x)$	–	0	+		+
$f(x)$	$\cap$	0	$\cup$		$\cup$

pt. d'infl.

Calcul de la pente de la tangente au point d'inflexion

Il y a un seul point d'inflexion en (0 ; 0).

$m=f'(0)=\dfrac{0^2(0-3)}{(0-1)^3}=\dfrac{0}{1}=0$

(on savait déjà d'après l'étape 6 que c'était un point d'inflexion à tangente horizontale).

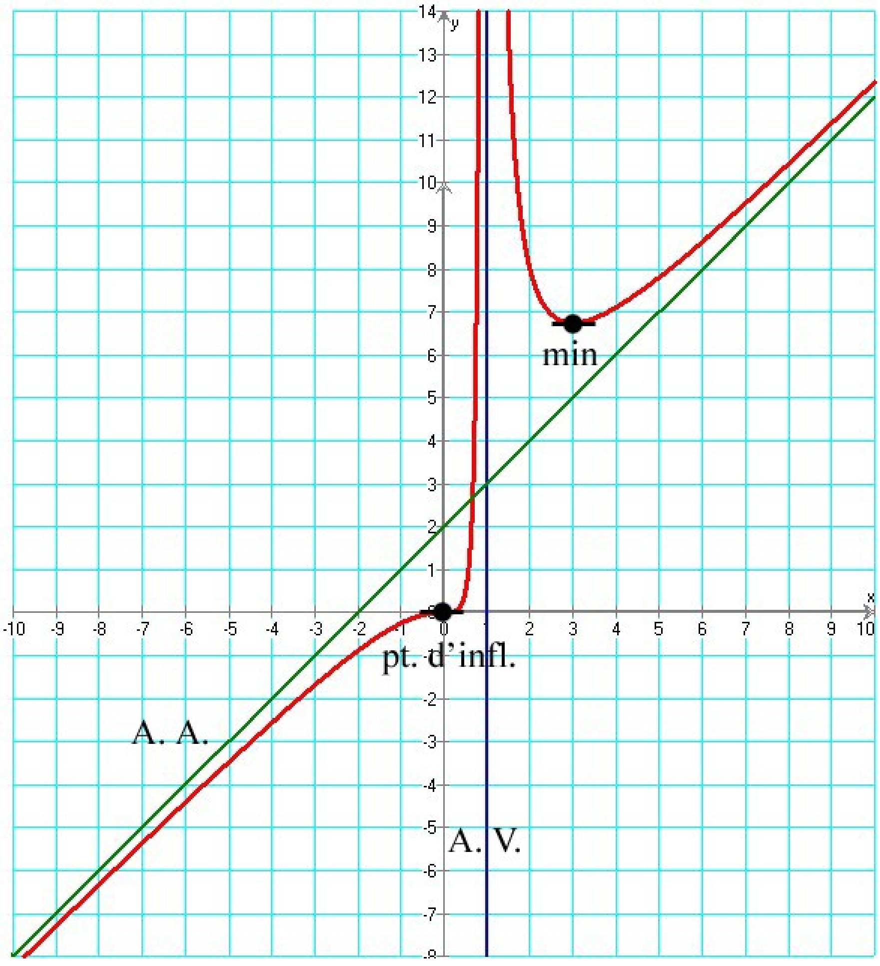
8. Représentation graphique

On trace d'abord les asymptotes trouvées aux étapes 4 et 5.

On place ensuite tous les points que l'on a trouvés aux étapes 3, 6 et 7.

On trace enfin la courbe d'après les indices récoltés aux étapes 2, 3, 6 et 7. Les tableaux en particulier sont d'une aide très précieuse.

Il est conseillé de calculer d'autres points de la fonction et de les reporter sur le dessin.



Remarque
Plutôt que de faire ce graphique à la fin de l'étude, on peut aussi le dessiner au fur et à mesure des étapes.

Exercice1

Étudiez les fonctions suivantes selon l'exemple du § 5.3. Vous trouverez des corrigés sur le site de ce cours.

Fonctions rationnelles

1. $f(x)=\dfrac{-3x+4}{2x+3}$

2. $f(x)=\dfrac{x^2-4x-5}{2(x^2-4x+3)}$ aide : $f''(x)=\dfrac{-8(3x^2-12x+13)}{(x^2-4x+3)^3}$

3. $f(x)=\dfrac{x(x-3)^2}{(x-2)^2}$ aide : $f''(x)=\dfrac{6(4-x)}{(x-2)^4}$

4. $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2-1}$

Autres types de fonctions

5. a. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ **5. b.** $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

6. $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

7. $f(x)=(2x^2+2x-1)\cdot\mathrm{e}^{-2x}$

8. $f(x)=\dfrac{\ln(x^2)+1}{2x}$

9. $f(x)=(\mathrm{e}^x-5)(\mathrm{e}^x+1)$

Exercice 2

En photographie, la *profondeur de champ* correspond à la zone de l'espace dans laquelle doit se trouver le sujet à photographier pour en obtenir une image que l'œil considérera nette.

En optique, pour que la netteté s'étende de la distance a à la distance r, la mise au point doit être faite à la distance $p=\dfrac{2ar}{a+r}$ (les distances sont exprimées en mètres).

a. À quelle distance doit être faite la mise au point pour photographier un sujet dont les éléments intéressants sont à une distance comprise entre 1.5 m et 3 m ?

On souhaite désormais que les sujets soient nets à partir d'une distance de 5 m.

b. Démontrez que pour $a > 5$, $p=10-\dfrac{50}{5+r}$.

c. Étudiez la fonction p du point **b** et dessinez son graphe.

d. On souhaite que la netteté s'étende de « 5 m à l'infini ». Quelle distance de mise au point doit-on choisir ?

5.4. Ce qu'il faut absolument savoir

Trouver les asymptotes d'une fonction ❏ ok

Connaître et maîtriser les huit étapes de la méthode par cœur ❏ ok