



الصفحة

1

1

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2012
الموضوع

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

9	المعامل	NS25	الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques
- Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes
- Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse

L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISE

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

EXERCICE 1 : (3.5 points) les parties I et II sont indépendantes

I- Dans l'anneau unitaire $(M_3(\mathbf{R}), +, \times)$, on considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0.75 1) Calculer $I - A$ et A^2

0.5 2) En déduire que A admet une matrice inverse que l'on déterminera .

II- Pour tout a et b de l'intervalle $I =]1, +\infty[$, on pose: $a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$

0.25 1) Vérifier que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$

0.5 2) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I

3) On rappelle que $(\mathbb{R}^{**}, \times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application $\varphi: \mathbb{R}^{**} \rightarrow I$
 $x \mapsto \sqrt{x+1}$

0,5 a - Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{**}, \times)$ vers $(I, *)$

0.25 b - En déduire la structure de $(I, *)$

0.75 c - Montrer que l'ensemble $\Gamma = \{ \sqrt{1+2^m} / m \in \mathbb{Z} \}$ est un sous groupe de $(I, *)$

EXERCICE 2 : (3.5 points) les parties I et II sont indépendantes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

I- On considère dans \mathbb{C} l'équation $(E) : iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$ où a est un nombre complexe non nul.

0.75 1) Déterminer z_1 et z_2 , les deux racines de l'équation (E)

0.25 2) a- Vérifier que : $z_1 z_2 = a^2(i-1)$.

0.5 b- Montrer que : $z_1 z_2$ est un nombre réel $\Leftrightarrow \arg a \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$

II- Soient c un nombre réel non nul et z un nombre complexe non nul.

On considère les points A, B, C, D et M d'affixes respectifs $1, 1+i, c, ic$ et z

0,5 1)a- Montrer que : A, D et M sont alignés $\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$ (remarquer que $c = \bar{c}$)

0,5 b - Montrer que : $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0$

0.75 2) Soit h l'affixe du point H , la projection orthogonale du point O sur (AD)

a - Montrer que : $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$.

0.25 b - En déduire que $(CH) \perp (BH)$

EXERCICE 3 : (3 points)

1) On considère dans \mathbb{R}^2 l'équation $(E) : 143x - 195y = 52$

0.5 a - Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195, puis en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans \mathbb{R}^2

0.75 b - Sachant que $(-1, -1)$ est une solution particulière de l'équation (E) , résoudre dans \mathbb{R}^2 l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

2) Soit n un entier naturel non nul premier avec 5

0.5 Montrer que pour tout k de \mathbb{N} on a : $n^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$

3) Soient x et y deux entiers naturels non nuls tel que $x \equiv y \pmod{4}$

0,5 a- Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , on a : $n^x \equiv n^y \pmod{5}$

0.5 b- En déduire que pour tout n de \mathbb{N}^* , on a : $n^x \equiv n^y \pmod{10}$

0.25 4) Soient x et y deux entiers naturels tel que (x, y) est solution de l'équation (E)

Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

EXERCICE 4 : (5.5 points)

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0,5 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

0.5 2) a - Etudier la branche infinie de (C_n) au voisinage de $-\infty$.

0.5 b - Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_n) au voisinage de $+\infty$, puis déterminer la position relative de (C_n) et (D)

0.75 3) Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.

0.75 4) Construire la courbe (C_3) . (On prend $f_3(-0,6) \approx 0$ et $f_3(-1,5) \approx 0$ et $\ln 3 \approx 1,1$)

- 0.25 5) a- Montrer que pour $n \geq 3$ on a : $\frac{e}{n} < \ln n$
 1 b- Montrer que pour $n \geq 3$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que : $x_n \leq -\ln n$ et $-\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0$
 0.5 c- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$

6) On considère la fonction numérique g définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x ; & x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

0.25 a- Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0

0.25 b- Vérifier que pour $n \geq 3$ on a : $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$

0.25 c- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$

EXERCICE 5 : (4.5points)

On considère la fonction numérique F définie sur $[0,1]$ par :

$$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \quad \text{si } x > 0$$

0.25 1) Soit x un élément de $[0,1]$; Montrer que pour tout t de $[0,x]$ on a : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

2) Soit x un élément de $]0,1]$

0.5 a- Montrer que $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$

0.75 b- Montrer que : $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$ En déduire que la fonction F est continue à droite au point 0

0.75 3) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout x de $[0,1]$ on a :

$$\int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

4) Soit x un élément de $]0,1]$

0.5 a- Montrer que $F'(x) = -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$

0.75 b- Montrer que : $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 1))

0.75 c- En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur $[0,x]$ montrer

que
$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

0.25 d- Déduire que la fonction F est dérivable à droite en 0 en précisant son nombre dérivé à droite au point 0 .