

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- الموضوع -

NS 25

ⵜⴰⴷⵓⴷⴰ ⵜⴰⴳⵓⴷⴰⵜ | ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵔⵉⵏ
ⵜⴰⴷⵓⴷⴰ ⵜⴰⴳⵓⴷⴰⵜ | ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵔⵉⵏ
ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵔⵉⵏ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵔⵉⵏ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux nombres complexes.....(3pts)
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique.....(3 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux structures algébriques.....(4 pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.....(6.5 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.....(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE 1: (3points)

1-On considère dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation suivante:

$$(E) : z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$$

- 0.25 a) Vérifier que $(3 - i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de l'équation (E) .
- 0.5 b) Déterminer a et b les deux solutions de l'équation (E) (sachant que : $b \neq a$)
- 0.25 c) Vérifier que: $b = (1 - i\sqrt{3})a$
- 2- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.
Soit A le point d'affixe a et B le point d'affixe b.
- 0.5 a) Déterminer b_1 l'affixe du point B_1 image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
- 0.5 b) Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$
- 0.5 c) Vérifier que : $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$
- 0.5 d) Soit C un point, d'affixe c, appartenant au cercle circonscrit au triangle OAB et différent de O et de A. Déterminer un argument du nombre complexe $\frac{c}{c-a}$

EXERCICE 2: (3points)

Soit x un nombre entier relatif tel que: $x^{1439} \equiv 1436 [2015]$

- 0.25 1-Sachant que: $1436 \cdot 1051 - 2015 \cdot 749 = 1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.
- 2- Soit d un diviseur commun de x et de 2015
- 0.5 a) Montrer que d divise 1436
- 0.5 b) En déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.
- 0.75 3-a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que:
 $x^{1440} \equiv 1 [5]$ et $x^{1440} \equiv 1 [13]$ et $x^{1440} \equiv 1 [31]$ (remarquer que: $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$)
- 0.5 b) Montrer que : $x^{1440} \equiv 1 [65]$ et en déduire que: $x^{1440} \equiv 1 [2015]$
- 0.5 4-Montrer que: $x \equiv 1051 [2015]$

EXERCICE 3: (4 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un anneau unitaire dont l'unité est $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que

$(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif. Pour tout nombre réel x, on pose $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ 2x & 1+2x \end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $E = \{M(x) / x \in \mathbb{C}\}$

On munit E de la loi de composition interne T définie par:

$$((x, y) \in \mathbb{C}^2) \quad M(x) T M(y) = M(x + y + 1)$$

1- Soit j l'application de E dans E définie par : ($\forall x \in E$) $j(x) = M(x-1)$

- 0.5 a) Montrer que j est un homomorphisme de $(E, +)$ vers (E, T)
- 0.5 b) Montrer que (E, T) est un groupe commutatif.
- 0.5 2- a) Montrer que: ($\forall (x, y) \in E^2$) $M(x)' M(y) = M(x + y + xy)$
- 0.5 b) En déduire que E est une partie stable de $(M_2(E), ')$ et que la loi « ' » est commutative dans E .
- 0.5 c) Montrer que la loi « \times » est distributive par rapport à la loi « T » dans E .
- 0.5 d) Vérifier que: $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E, T) et que I est l'élément neutre dans $(E, ')$.
- 0.25 3- a) Vérifier que : ($\forall x \in E - \{-1\}$) $M(x)' M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$.
- 0.75 b) Montrer que $(E, T, ')$ est un corps commutatif.

EXERCICE 4: (6.5points)

Première partie: Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par:

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x(1 + \ln^2 x) \text{ pour } x > 0$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, i, j) .

- 0.5 1- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 0.25 2-a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.
- 0.5 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 0.5 c) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, en déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$
- 0.25 3-a) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I d'abscisse e^{-1} .
- 0.25 b) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite d'équation: $y = x$
- 0.5 c) Tracer la courbe (C) . (On prendra $e^{-1} = 0.4$)

Deuxième partie: On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par:

$$u_0 = e^{-1} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

- 0.5 1- Montrer par récurrence que: ($\forall n \in \mathbb{N}$) $e^{-1} \leq u_n < 1$
- 0.5 2- Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.
- 3- On pose: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

- 0.25 a) Montrer que: $e^{-1} \leq l \leq 1$
- 0.5 b) Déterminer la valeur de l

Troisième partie: Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par:

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

- 0.25 1-a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto x \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$

0.5 b) Montrer que: $(\forall x > 0) \int_1^x t \ln^2(t) dt = \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \int_1^x t \ln(t) dt$

0.5 c) En déduire que: $(\forall x > 0) F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{x^2}{2} \ln^2(x)$

- 0.25 2-a) Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$

0.5 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$

EXERCICE 5: (3.5 points)

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par:

$$g(0) = \ln 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad \text{pour } x > 0$$

- 0.5 1-a) Montrer que: $(\forall x > 0) (\forall t \in [x, 2x]) \quad e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$
- 0.5 b) Montrer que: $(\forall x > 0) \quad e^{-2x} \ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x} \ln 2$
- 0.25 c) En déduire que la fonction g est continue à droite en 0.
- 0.75 2- Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$
- 0.5 3-a) Montrer que: $(\forall t > 0) \quad -1 \leq \frac{e^{-t} - 1}{t} \leq -e^{-t}$
- (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)
- 0.5 b) Montrer que: $(\forall x > 0) \quad -1 \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$
- 0.5 c) En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0.

FIN