

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2015
- الموضوع -

RS 25

ⵜⴰⴷⵓⴷⴰ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ | ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵙⵏ
ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ | ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵙⵏ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵙⵏ
ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵙⵏ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵙⵏ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.....(4 pts)
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique et au calcul des probabilités.....(3 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.....(3pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.....(6 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.....(4 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1:(4 points)

Première partie: On munit \mathbb{C} de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$((x, y) \times (x', y')) \quad x * y = x + y - e^{-xy} + 1$$

- 0.25 1-a) Montrer que la loi $*$ est commutative dans \mathbb{C}
- 0.5 b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
- 0.5 2- Sachant que l'équation : $3 + x - e^{2x} = 0$ admet dans \mathbb{C} deux solutions distinctes a et b .
Montrer que la loi $*$ n'est pas associative dans \mathbb{C}

Deuxième partie : On rappelle que $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que (\mathbb{C}^*, \cdot) est un groupe commutatif.

Pour tout x et y réels, on pose : $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$ et soit $F = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$

- 0.5 1- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$
- 0.5 2- Montrer que F est stable dans $(M_2(\mathbb{C}), \cdot)$
- 3- On considère l'application j de \mathbb{C}^* dans F qui associe à tout nombre complexe $x + iy$ (où x et y sont deux réels) la matrice $M(x, y)$.
- 0.5 a) Montrer que j est un homomorphisme de (\mathbb{C}^*, \cdot) vers (F, \cdot)
- 0.25 b) On pose : $F^* = F - \{M(0,0)\}$. Montrer que $j(\mathbb{C}^*) = F^*$
- 0.25 c) Montrer que (F^*, \cdot) est un groupe commutatif.
- 0.75 4- Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

EXERCICE2: (3 points)

- 0.5 I-1- a étant un entier, montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors $a^{2016} \equiv 1 \pmod{13}$
- 2- On considère dans \mathbb{Z} l'équation (E): $x^{2015} \equiv 2 \pmod{13}$ et soit x une solution de l'équation (E).
 - 0.5 a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.
 - 0.5 b) Montrer que : $x \equiv 7 \pmod{13}$
- 0.5 3- Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{7 + 13k / k \in \mathbb{Z}\}$
- II- Une urne contient 50 boules portant les numéros de 1 à 50 (les boules sont indiscernables au toucher)
 - 0.5 1- On tire au hasard une boule de l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro qui est solution de l'équation (E) ?
 - 0.5 2- On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro, puis on la remet dans l'urne. On répète l'expérience précédente 3 fois .Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un numéro qui est solution de l'équation (E) ?

EXERCICE3:(3 points)

On considère dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation suivante: $(E) : z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$

- 0.25 1-a)Vérifier que $(1 - 3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E)
- 0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E) dans l'ensemble \mathbb{C} (on prendra z_1 imaginaire pur)
- 0.5 c) Montrer que: $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- 2- Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère le point A d'affixe z_1 et le point B d'affixe z_2
- 0.25 a)Déterminer le nombre complexe e affixe du point E milieu du segment $[AB]$
- 0.5 b) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et soit c l'affixe du point C image du point E
- 0.5 par la rotation r . Montrer que : $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$
- 1 c) On considère D le point d'affixe $d = 1 + \frac{3}{2}i$. Montrer que le nombre $\frac{z_2 - d}{c - d} \cdot \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_2}$ est réel puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

EXERCICE4:(6 points)

Soit n un entier naturel non nul .

On considère la fonction f_n à variable réelle x définie sur \mathbb{R} par: $f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 0.75 1-a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 0.75 b) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R} puis calculer $f'_n(x)$ pour tout x de \mathbb{R}
- 0.25 c) Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur \mathbb{R}
- 0.5 2-a) Montrer que le point $I_n(n, \frac{1}{2})$ est le centre de symétrie de la courbe (C_n)
- 0.5 b) Construire la courbe (C_1) .
- 0.75 c) Calculer l'aire de la surface plane limitée par la courbe et les droites d'équations: $x = 0, x = 1$ et $y = 0$
- 0.75 3-a) Pour tout n de \mathbb{N}^* , montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une solution unique u_n dans

l'intervalle $]0, n[$.

- 0.5 b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) (\forall n \in \mathbb{N}^*) f_{n+1}(x) < f_n(x)$
- 0.75 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 0.5 d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE5:(4 points)

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R}^* par: $g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$

- 0.5 1-Montrer que la fonction g est paire.
- 0.75 2-Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ [puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$
- 0.5 3-a) En utilisant une intégration par parties, vérifier que:

$$\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

- 0.75 b) Montrer que: $(\forall x > 0) |g(x)| \leq \frac{2}{x}$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

- 0.5 4-a) Montrer que: $(\forall x > 0) 0 \leq \int_x^{3x} \frac{1 - \cos t}{t} dt \leq 2x$

(Remarquer que : $(\forall t > 0) 1 - \cos t \leq t$)

- 0.5 b) Vérifier que: $(\forall x > 0) g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$

- 0.5 c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

FIN