

الصفحة 1 5	<p>الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة العادية 2017 - الموضوع -</p>	<p>المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي</p> <p>المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه</p>
★★	NS 25	

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice1 se rapporte aux structures algébriques.....(3,5pts)
- L'exercice2 se rapporte aux nombres complexes.....(3,5pts)
- L'exercice3 se rapporte à l'arithmétique.....(3pts)
- L'exercice4 se rapporte à l'analyse.....(10pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé  
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

**EXERCICE1 : (3,5 points)**

On rappelle que  $(M_3(i), +, \cdot)$  est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et d'unité la matrice  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et que  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  est un corps commutatif.

On pose  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et pour tout  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ ,  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble  $E = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$

0.5 1- Montrer que  $E$  est un sous-groupe du groupe  $(M_3(i), +)$

0.5 2- On définit dans  $M_3(i)$  la loi de composition interne  $T$  par :

$$M(a, b) T M(c, d) = M(a, b) \cdot A \cdot M(c, d)$$

Vérifier que  $E$  est stable dans  $(M_3(i), T)$

3- soit  $j$  l'application de  $\mathbb{C}^*$  dans  $E$  qui à tout nombre complexe non nul  $a + ib$  (où  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ ) fait correspondre la matrice  $M(a, b)$  de  $E$

0.75 a) Vérifier que  $j$  est un homomorphisme de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  vers  $(E, T)$  et que  $j(\mathbb{C}^*) = E^*$  où  $E^* = E \setminus \{M(0, 0)\}$

0.75 b) En déduire que  $(E^*, T)$  est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre  $J$

0.5 4- a) Montrer que la loi de composition interne " $T$ " est distributive par rapport à la loi de composition interne "+" dans  $E$

0.5 b) En déduire que  $(E, +, T)$  est un corps commutatif.

**EXERCICE2 : (3,5 points)**

Soit  $m$  un nombre complexe **non nul**.

**Partie1** : On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$(E) : 2z^2 - 2(m + 1 + i)z + m^2 + (1 + i)m + i = 0$$

0.5 1- Vérifier que le discriminant de l'équation  $(E)$  est :  $D = (2im)^2$

0.5 2- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$

**Partie2** : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On suppose que :  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, i\}$  et on pose :  $z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1)$  et  $z_2 = \frac{1-i}{2}(m+i)$

On considère les points  $A, B, M, M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectifs  $1, i, m, z_1$  et  $z_2$

0.25 1-a) Vérifier que :  $z_1 = iz_2 + 1$

0.5 b) Montrer que  $M_1$  est l'image de  $M_2$  par la rotation de centre le point  $W$  d'affixe

$$w = \frac{1+i}{2} \text{ et d'angle de mesure } \frac{\pi}{2}$$

0.5 2- a) Vérifier que :  $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m-1}{m-i}$

0.5 b) Montrer que si les points  $M, M_1$  et  $M_2$  sont alignés alors  $M$  appartient au cercle  $(G)$  de diamètre  $[AB]$

0.75 c) Déterminer l'ensemble des points  $M$  pour que les points  $W, M, M_1$  et  $M_2$  soient cocycliques (remarquer que :  $\frac{z_1 - w}{z_2 - w} = i$ )

### **EXERCICE3 : (3points)**

On admet que 2017 est un nombre premier, et que  $2016 = 2^5 3^2 7$

Soit  $p$  un nombre premier supérieur ou égal à 5

1- Soit le couple  $(x, y)$  de  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que :  $px + y^{p-1} = 2017$

0.25 a) Vérifier que :  $p < 2017$

0.5 b) Montrer que :  $p$  ne divise pas  $y$

0.75 c) Montrer que :  $y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  et en déduire que  $p$  divise 2016

0.5 d) Montrer que :  $p = 7$

1 2- Déterminer, suivant les valeurs de  $p$ , les couples  $(x, y)$  de  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  vérifiant:

$$px + y^{p-1} = 2017$$

### **EXERCICE 4: (10 points)**

**Partie1** : On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$f(0) = 0 \text{ et } (\forall x \in ]0, +\infty[) \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(on prend :  $\|i\| = \|j\| = 2cm$  )

- 0.25 1-a) Montrer que la fonction  $f$  est continue à droite en 0  
 0.5 b) Montrer que la fonction  $f$  est dérivable à droite en 0  
 0.5 c) Montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  puis calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  dans l'intervalle  $]0, +\infty[$   
 0.5 2- a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.  
 0.25 b) Donner le tableau de variation de la fonction  $f$   
 0.75 3- a) Montrer que la courbe  $(C)$  admet un point d'inflexion  $I$  dont on déterminera les coordonnées.  
 0.5 b) Tracer la courbe  $(C)$  (On prend :  $f(1)$ ;  $0,7$  et  $4e^{-3}$ ;  $0,2$ )

**Partie2** : On considère la fonction numérique  $F$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$F(x) = \int_x^1 f(t) dt$$

- 0.25 1-Montrer que la fonction  $F$  est continue sur l'intervalle  $[0, +\infty[$   
 0.5 2-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :  

$$(\forall x \in ]0, +\infty[) \quad \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}} dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt$$
  
 0.25 b) Déterminer  $\int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}} dt$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$   
 0.5 c) Montrer que :  $\int_0^1 f(t) dt = e^{-1}$   
 0.5 3-Calculer en  $cm^2$ , l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C)$  et les droites d'équations :  $x = 0$ ,  $x = 2$  et  $y = 0$   
 4- On considère la suite numérique  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $u_n = F(n) - F(n+2)$   
 0.5 a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel  $n$ , il existe un réel  $v_n$  de l'intervalle  $]n, n+2[$  tel que :  $u_n = 2 \left(1 + \frac{1}{v_n}\right) e^{-\frac{1}{v_n}}$   
 0.25 b) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2 \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) e^{-\frac{1}{n+2}}$   
 0.25 c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**Partie3 :**

- 0.5 1-a) Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , il existe un nombre réel strictement positif unique  $a_n$  tel que :  $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$
- 0.25 b) Montrer que la suite numérique  $(a_n)_{n \geq 1}$  est croissante.
- 0.25 c) Vérifier que :  $(n \in \mathbb{N}^*) \quad - \frac{1}{a_n} + \ln \left( 1 + \frac{1}{a_n} \right) - \frac{1}{n}$
- 0.25 2-a) Montrer que :  $(t \in [0, +\infty[) \quad 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$
- 0.5 b) Montrer que :  $(x \in [0, +\infty[) \quad -\frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
- 3- Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 4
- 0.5 a) Vérifier que :  $a_n^3 \leq 1$ , en déduire que  $a_n^3 \leq 1$  (On admettra que :  $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$ )
- 0.5 b) Montrer que :  $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$   
(On pourra utiliser les questions 1-c) et 2-b) de la partie 3)
- 0.5 c) Montrer que :  $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n$  (On pourra utiliser les questions 3-a) et 3-b)),  
en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$
- 0.5 d) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{n}}$

**FIN**