

Bac Sciences Mathématiques National 2018

EXERCICE 1 : (3,5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, de zéro la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $E = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

- 0,25 1- Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}), +)$
- 0,25 2- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$
- 0,5 b) On pose $J = M(0, 1)$. Montrer que (I, J) est une base de l'espace vectoriel réel $(E, +, \cdot)$
- 0,5 3- a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$
- 0,5 b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.
- 4- Soit φ l'application de \mathbb{C}^* vers $M_2(\mathbb{R})$ définie par :
- $$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}) ; \varphi(x + iy) = M(x + y, -y) = \begin{pmatrix} x + y & 2y \\ -y & x - y \end{pmatrix}$$
- 0,5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de (\mathbb{C}^*, \times) vers $(M_2(\mathbb{R}), \times)$
- 0,5 b) On pose $E^* = E - \{O\}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$
- 0,25 c) En déduire que (E^*, \times) est un groupe commutatif.
- 0,25 5- Montrer que $(E, +, \times)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 2 : (3 points)

Soit p un nombre premier tel que : $p = 3 + 4k$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

- 0,5 1- Montrer que pour tout entier relatif x , si $x^2 \equiv 1[p]$ alors $x^{p-5} \equiv 1[p]$
- 2- Soit x un entier relatif vérifiant : $x^{p-5} \equiv 1[p]$
- 0,5 a) Montrer que x et p sont premiers entre eux.
- 0,5 b) Montrer que : $x^{p-1} \equiv 1[p]$.

- 0,5 c) Vérifier que : $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$
 0,5 d) En déduire que : $x^2 \equiv 1[p]$
 0,5 3- Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation : $x^{62} \equiv 1[67]$

EXERCICE 3 : (3,5 points)

Soit m un nombre complexe .

I- On considère dans l'ensemble complexes \mathbb{C} l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$$

- 0,25 1- a) Vérifier que $\Delta = (im - 2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)
 0,5 b) Donner, suivant les valeurs de m , l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)
 0,5 2- Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.
 II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})
 On considère les points A, Ω, M et M' d'affixes respectifs $a = -1 - i, \omega = i, m$
 et $m' = -im - 1 + i$
 1- Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'
 0,25 a) Vérifier que Ω est le centre de R
 0,5 b) Déterminer l'affixe b de B , où B est le point tel que : $A = R(B)$
 0,5 2- a) Vérifier que : $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$
 0,5 b) En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si les points A, B, Ω et M sont cocycliques .
 0,5 c) Montrer que l'ensemble des points M tel que les points A, M et M' soient alignés
 Est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon .

EXERCICE 4 : (7,5 points)

Partie I :

- 0,5 1- a) Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; \int_0^x \frac{t}{1+t} dt = x - \ln(1+x)$
 b) En utilisant le changement de variable $u = t^2$, montrer que :
 0,5 $(\forall x \in]0, +\infty[) ; \int_0^x \frac{t}{1+t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}} du$

0,5 c) En déduire que : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

0,25 2- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$:
$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right) \ln(1+x) & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

0,25 1- a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

0,5 (On pourra utiliser le résultat de la question I.2)

0,75 c) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 2- a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) ; f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

0,25 b) En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

0,25 c) Vérifier que : $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$

3- Représenter graphiquement la courbe (C)

0,5 (On construira la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0)

Partie III :

1- On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$

0,5 a) Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$

0,5 b) En déduire que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ puis montrer que $g(]0, +\infty[) =]-\infty, 1[$

0,25 c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $]0, +\infty[$

2- Soit a un réel de l'intervalle $]0, +\infty[$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$

0,25 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

- | | |
|------|--|
| 0,5 | b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2} u_n - \alpha $ |
| 0,5 | c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n a - \alpha $ |
| 0,25 | d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α |

EXERCICE 5 : (2,5 points)

- On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$
- | | |
|-----|---|
| 0,5 | 1- Montrer que F est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} |
| 0,5 | 2- a) Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; F(x) \geq x$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ |
| 0,5 | b) Montrer que F est impaire , en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ |
| 0,5 | c) Montrer que F est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} |
| 0,5 | d) Montrer que la bijection réciproque G de la fonction F est dérivable en 0 , puis calculer $G'(0)$ |