الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2020
- عناصر الإجابة –

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | NR 25

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)	المعامل	9

N.B : Si un candidat traite les deux exercices qui sont au choix (totalement ou partiellement) on lui attribue la meilleure note obtenue parmi les deux notes (et non pas la somme des deux notes).

EXERCICE1		**Eléments de réponses**	**Barème**
1-	a)	Si d est un diviseur commun positif à x et 13 alors c'est un diviseur commun à 13 et 5 donc $d=1$	0.5
	b)	13 est premier et 1 3 et x sont premier entre eux , et on applique le théorème de FERMAT	0.5
	c)	On a : $7x^3 \equiv 5\ [13]$ et donc $x^3 \equiv 2\times 5\ [13]$ car : $2\times 7\equiv 1\ [13]$	1
	d)	On a $x^3\equiv 10\ [13]$ donc $\left(x^3\right)^4 \equiv 10^4\ [13]$ donc $x^{12}\equiv 3\ [13]$	0.5
2-		Si $(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ est solution de (E) alors d'après la question 1- on a $x^{12}\equiv 1\ [13]$ et $x^{12}\equiv 3\ [13]$ donc $3\equiv 1\ [13]$ ce qui est absurde	1

EXERCICE2		**Eléments de réponses**	**Barème**
1-	a)	Stabilité de E dans $\left(M_2(\mathbb{R}),\times\right)$	0.5
	b)	La non commutativité de la multiplication dans E	0.5
	c)	Vérification	0.5
2-		$(E,\times)$ est un groupe non commutatif	0.5
3-	a)	φ est un morphisme	0.5
	b)	φ est un morphisme et $\varphi\left(\mathbb{R}^*\right)=F$ et $\left(\mathbb{R}^*,\times\right)$ est un groupe commutatif……………………………………………………………0.5 Son élément neutre est $\varphi(1)=I$ ………………………..0.5	1

EXERCICE3		Eléments de réponses	Barème
Première partie :			
1-		$(E) \Leftrightarrow (z-m)\left(z^2-mz+m^2\right)=0$ Les solutions de l'équation (E) sont : m et $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}m=e^{i\frac{\pi}{3}}m$ et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}m=e^{-i\frac{\pi}{3}}m$	0.5
2-	a)	On vérifie que $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}=\frac{m}{m^2}$	0.25
	b)	On trouve $z_1=i\sqrt{3}$ et $z_2=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$	0.5
Deuxième partie :			
1-		Les points O , A et B ne sont pas alignés	0.25
2-	a)	Calcul de p ……………………………………………………………0.5 Calcul de r ……………………………………………………………0.5	1
	b)	Calcul de q ……………………………………………………………………	0.5
3-		On a $\frac{p-r}{q}=i$ on déduit que : $OQ=PR$ ……………0.25 et $(OQ)\perp(PR)$ ……………………………………………………0.25	0.5

EXERCICE4		Eléments de réponses	Barème
Première partie :			
1-		$(\forall x>0)\ \left(\exists c_x\in\left]x;x+1\right[\right)$; $\ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{c_x}$ …………0.25 L'encadrement : $\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$ ……………………… 0.25	0.5
2-	a)	On a : $\frac{x^2}{1+x}<\frac{f(x)}{x}<x$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0$ et donc f est dérivable à droite en 0	0.5
	b)	On a : $\frac{x^2}{1+x}<\frac{f(x)}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ……… (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées	0.5
3-	a)	f dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ ……………………………………………0.25 Calcul de $f'(x)$ ……………………………………………………………0.5	0.75

	b)	On a : $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}>\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}>0$ donc $f'(x)>0$ et donc la f est strictement croissante	0.5
	c)	Le tableau de variations f	0.25
4-	a)	Calcul de $g'(x)$ .... 0.5 On a : $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}>\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}>0$ donc $g'(x)>0$ et donc g est strictement croissante 0.25	0.75
	b)	g est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$ et $1\in\,]0;+\infty[$ ...0.25 Ou utiliser le T.V.I pour l'existence et la stricte monotonie pour l'unicité On vérifie que $g(1)<1<g(2)$ 0.25	0.5
	c)	les solutions de l'équation : $f(x)=x \Leftrightarrow x=0$ ou $g(x)=1$	0.5
5-	a)	La représentation de (C)	0.5
	b)	f bijection	0.25
Deuxième partie :			
1-		Récurrence et croissance de f^{-1} et le fait que $f^{-1}(0)=0$ et $f^{-1}(\alpha)=\alpha$	0.5
2-	a)	$g(]0;\alpha[)=]0;1[$..	0.5
	b)	Pour $0<x<\alpha$, on a $0<g(x)<1$ Puisque $0<u_n<\alpha$,alors $0<f(u_n)<u_n$ donc $0<u_n<f^{-1}(u_n)=u_{n+1}$ donc..	0.5
	c)	suite croissante et majorée	0.25
3-		Si on pose : $l=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ alors on a $0<u_0\le l\le\alpha$ car $(\forall n\ge 1)$; $0<u_0\le u_n<\alpha$ et puisque f^{-1} est continue sur $[0;\alpha]$ (en particulier en l) alors l est solution de l'équation $f^{-1}(x)=x$ et donc $l=\alpha$	0.5
Troisième partie :			
1-	a)	f est positive donc si $0\le x\le 1$ on a $F(x)\ge 0$ et si $x\ge 1$ on a $F(x)\le 0$	0.5
	b)	F est dérivable sur I car f est continue sur I 0.25	0.5

		et $(\forall x\in I)\ ;\ F'(x)=-f(x)$ 0.25	
	c)	$(\forall x\in I)\ ;\ F'(x)=-f(x)\le 0$ et $F'(x)=0\Leftrightarrow x=0$	0.25
2-	a)	On a $\forall x\ge 1\ ;\ f(x)\ge \ln 2$ donc $\int_1^x f(t)dt\ge (x-1)\ln 2$	0.5
	b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=-\infty$	0.25
3-	a)	Intégration par parties	0.5
	b)	$\int_x^1 \frac{t^3}{t+1}dt=\frac{5}{6}-\ln 2-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+\ln(1+x)$	0.5
	c)	Calcul de $F(x)$	0.5
	d)	On a $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\frac{5}{24}$ ....0.25 F étant continue à droite en 0 (puisque continue sur I), donc $\int_0^1 f(t)dt=F(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\frac{5}{24}$ 0.25	0.5
4-	a)	- Appliquer le théorème ou l'inégalité des accroissements finis à la fonction F sur $\left[\frac{k}{n},\frac{2k+1}{2n}\right]$ Avec $\left(\forall x\in\left[\frac{k}{n},\frac{2k+1}{2n}\right]\right)$; $f\left(\frac{k}{n}\right)\le f(x)\le f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$	0.5
	b)	On remarque que : $\frac{2k+1}{2n}<\frac{k+1}{n}$	0.5
	c)	$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ sont les Sommes de Riemann associées à la fonction f continue sur le segment $[0,1]$ donc les deux suites $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_n$ et $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_n$ sont convergentes et ont même limite qui est $F(0)=\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{24}$ donc la suite (v_n) est convergente et a pour limite $-\frac{1}{2}F(0)=-\frac{5}{48}$	0.25