Cours et **exercices d'applications et de réflexions** ***sur*** **les Lois de composition interne**

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

Structures algébriques(partie1)

Lois de composition interne

I) Lois de composition interne

1)Introduction :

a)L'opération + sur $\mathbb{R}$ est une application f qui, à deux reéls (x, y) en associe un troisième z (la somme)qui est aussi un réel : $f(x;y)=x+y=z$

on a donc : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \\ (x;y)\mapsto f(x;y)=x+y \end{array}$

on dit L'opération + est une lois de composition interne sur $\mathbb{R}$

b) L'opération **-** sur $\mathbb{N}$ n'est une lois de composition interne sur $\mathbb{N}$ car par exemple : $2\in\mathbb{N}$ et $3\in\mathbb{N}$ mais : $2-3\notin\mathbb{N}$

2)Définition : Soit E un ensemble non vide. Une loi de composition interne sur E (ou encore une opération dans E) est une application f de E × E dans E.

$$\begin{array}{l} f:E\times E\rightarrow E \\ (x;y)\mapsto f(x;y) \end{array}$$

3)notations : l'élément : $f(x;y)$ dans E s'appelle la composée de x et y dans l'ordre par cette lois de composition interne f et on le note : $x*y$ ou xTy ou $x\perp y$ ou $x\vee y$ …

au lieu de : $f(x;y)$

4)Autre exemples d'ensembles et lois de compositions internes :

On connait les ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$

1) • Dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'addition et la multiplication sont des lois de composition interne on écrit : $(\mathbb{N};+)$; $(\mathbb{Z};+)$; $(\mathbb{Q};+)$ $(\mathbb{R};+)$ $(\mathbb{C};+)$; $(\mathbb{N};\times)$; $(\mathbb{Z};\times)$; $(\mathbb{Q};\times)$ $(\mathbb{R};\times)$ $(\mathbb{C};\times)$

• Dans $\mathbb{N}$, la soustraction n'est pas une loi interne, mais elle l'est dans $\mathbb{Z}$: $(\mathbb{Z};-)$

• La division dans $\mathbb{R}$ n'est pas une loi interne mais la division dans $\mathbb{R}^*$ l'est. on a : $(\mathbb{R}^*;\div)$

• Dans $\mathbb{N}^*$, l'exponentiation, c'est-à-dire l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\rightarrow\mathbb{N}^* \\ (x;y)\mapsto x^y \end{array}$, le PGCD ou le PPCM sont des lois internes :

on a donc : $(\mathbb{N}^*;f)$; $(\mathbb{N}^*;\wedge)$; $(\mathbb{N}^*;\vee)$

• E étant un ensemble donné ; $\mathrm{P}(E)$ l'ensemble des parties de E on a : $X\in\mathrm{P}(E)\Leftrightarrow X\subset E$

$x\in X\cap Y\Leftrightarrow x\in X$ et $x\in Y$ $x\in X\cup Y\Leftrightarrow x\in X$ ou $x\in Y$

$x\in\bar{X}\Leftrightarrow x\notin X$ $x\in X-Y\Leftrightarrow x\in X$ et $x\notin Y$

$x\in X\Delta Y\Leftrightarrow x\in X-Y$ ou $x\in Y-X$

, l'intersection et la réunion et la différence symétrique et le complémentaire sont des lois de composition interne dans $\mathrm{P}(E)$ donc : $(\mathrm{P}(E);\cup)$; $(\mathrm{P}(E);\cap)$; $(\mathrm{P}(E);\Delta)$; $(\mathrm{P}(E);^c)$

• l'addition et la multiplication dans

$\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}=\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};...;\overline{n-1}\}$ sont définies par:

$$\forall(\overline{x};\overline{y})\in\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^2\begin{cases}\overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}\\ \overline{x}\times\overline{y}=\overline{x\times y}\end{cases}$$

l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ sont des lois de composition interne dans on écrit :

$\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}};+\right)$; $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}};\times\right)$

• l'ensemble des polynômes de degrés inferieur a un entier naturel n se note : $\mathbb{R}_n[X]$

la somme et la multiplication de deux polynômes P et Q sont définies par:

∀x ∈ $\mathbb{R}$, (P + Q)(x) =P(x) + Q(x).

∀x ∈ $\mathbb{R}$, (P × Q)(x) = P(x) × Q(x).

La somme et le produit de deux polynômes de degrés inferieur a n est un polynômes de degrés inferieur a n . Donc, + et × sont des lois de compositions internes sur $\mathbb{R}_n[X]$

on écrit : $(\mathbb{R}_n[X];+)$; $(\mathbb{R}_n[X];\times)$

• Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonction de I dans $\mathbb{R}$

Se note : $F(I;\mathbb{R})=\left\{\begin{matrix}f:I\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x)\end{matrix}\right\}$

la somme et la multiplication de deux applications f et g de I dans $\mathbb{R}$ sont définies par: ∀x ∈ I , (f + g)(x) = f(x) + g(x).

∀x ∈ I , (f × g)(x) = f(x) × g(x).

La somme de deux applications de I dans $\mathbb{R}$ est une application de I dans $\mathbb{R}$. Donc, + et × sont des lois de compositions internes sur $F(I;\mathbb{R})$

on écrit : $(F(I;\mathbb{R});+)$; $(F(I;\mathbb{R});\times)$

• Si E est un ensemble non vide

Dans $F(E;E)$ est l'ensemble des fonctions de E dans E on définit la relation $\circ$ par :

∀x ∈ E , (f ∘ g)(x) = f(g(x))

$\circ$ est une loi interne dans $F(E;E)$ on écrit :

$(F(E;E);\circ)$

• l'ensemble des translations On le note : T_r

la composition de deux translations est une translation donc : $\circ$ est une loi interne dans T_r

on écrit : $(T_r;\circ)$

• L'ensemble des homothéties de même centre O on le note : H_O et on a la composition de deux homothéties de centre O est une homothétie de centre O donc : $\circ$ est une loi interne dans H_O on écrit : $(H_O;\circ)$

•L'ensemble des rotations de même centre O on le note : R_O et on a la composition de deux rotations de centre O est une rotation de centre O donc : $\circ$ est une loi interne dans R_O

on écrit : $(R_O;\circ)$

• tout application bijective du plan P dans P on l'appelle une transformation du plan

L'ensemble des transformations du plan on le note : T on a :

$$\forall(f;g)\in\mathrm{T}\ \ \forall M\in P\quad (f\circ g)(M)=f(g(M))$$

Donc : la composition de deux transformations est une transformation.

donc : $\circ$ est une loi interne dans T

on écrit : $(\mathrm{T};\circ)$

•L'ensemble des vecteurs du plan on le note : V_2

et on a la somme de deux vecteurs est un vecteur donc : $+$ est une loi de composition interne dans V_2 on écrit : $(V_2;+)$

• le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur mais un scalaire donc : $\bullet$ n'est pas une loi de composition interne dans V_2

5)Applications :

Exemple1 :1)montrer on utulisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4}\}$ que l'addition et la multiplication sont des lois de compositions internes

Solution :

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};+\right)$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};\times\right)$

on utulisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on remarque bien que ce sont des lois de compositions internes

Exemple2 : on définit sur l'ensemble $]-1;1[$ la relation T tel que : $xTy=\dfrac{x+y}{1+xy}$;

$\forall(x;y)\in]-1;1[^2$

Monter que T est une loi de composition interne Dans $]-1;1[$

Solution : soit $x\in]-1;1[$ et $y\in]-1;1[$

Montrons que : $xTy=\dfrac{x+y}{1+xy}\in]-1;1[$?

Calculons : $1-\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)^2$

$$1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2=\frac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{(1+xy)^2}=\frac{x^2y^2+2xy+1-x^2-y^2-2xy}{(1+xy)^2}$$

$$1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2=\frac{1-x^2-y^2+x^2y^2}{(1+xy)^2}=\frac{1-x^2-y^2\left(1-x^2\right)}{(1+xy)^2}$$

$$1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2=\frac{1-x^2-y^2+x^2y^2}{(1+xy)^2}=\frac{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}{(1+xy)^2}$$

Or $x\in]-1;1[$ et $y\in]-1;1[$ donc : $|x|\prec 1$ et $|y|\prec 1$

donc : $x^2\prec 1$ et $y^2\prec 1$ on a donc : $1-\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)^2\succ 0$

donc : $\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)^2\prec 1$ donc : $\sqrt{\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)^2}\prec\sqrt{1}$

donc : $\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|\prec 1$ donc : $-1\prec\dfrac{x+y}{1+xy}\prec 1$

donc : $\dfrac{x+y}{1+xy}\in]-1;1[$ cqfd

6) les matrices :

6-1) matrice carrée d'ordre 2

a)Définition1 :

1)Une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels est un tableau de quatre nombres (Il n'y a pas de séparation verticale ou horizontale, contrairement aux tableaux)

2)l'ensemble des matrices carrées d'ordre2

On le note :

$$M_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}/(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4\right\}$$

La somme et la multiplication et l'égalité de deux matrices A et B dans $M_2(\mathbb{R})$ sont définies par:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+a' & b+b'\\ c+c' & d+d'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa'+bc' & ab'+bd'\\ ca'+dc' & cb'+dd'\end{pmatrix}$$

La somme et le produit de deux matrices sont des lois de compositions internes dans $M_2(\mathbb{R})$

on écrit : $(M_2(\mathbb{R});+)$; $(M_2(\mathbb{R});\times)$

L'égalité est définie par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \end{cases}$$

b)Cas particulier :

1)la matrice : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice unitaire

Et on a : $A \times I_2 = A \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$

2)la matrice : $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice nulle

Et on a : $A + 0 = A \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$

6-2) matrice carrée d'ordre 3

a)Définition :

1)Une matrice carrée d'ordre 3
à coefficients réels est un tableau de 9 nombres

2) l'ensemble des matrices carrées d'ordre3

On le note :

$$M_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} / (a;b;c;d;f;g;h;i) \in \mathbb{R}^9 \right\}$$

La somme et la multiplication de deux matrices A et B dans $M_3(\mathbb{R})$ sont définies par:

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & d+d' & g+g' \\ b+b' & e+e' & h+h' \\ c+c' & f+f' & i+i' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & d'' & g'' \\ b'' & e'' & h'' \\ c'' & f'' & i'' \end{pmatrix}$$

Avec : $a'' = aa' + db' + gc' \qquad d'' = ad' + de' + gf'$

$b'' = ba' + eb' + hc' \qquad e'' = bd' + ee' + hf'$

$c'' = ca' + fb' + ic' \qquad f'' = cd' + fe' + if'$

$g'' = ag' + dh' + gi' \qquad h'' = bg' + eh' + hi'$

$i'' = cg' + fh' + ii'$ La somme et le produit de deux matrices sont des lois de compositions internes dans $M_3(\mathbb{R})$ on écrit : $(M_3(\mathbb{R});+)$; $(M_3(\mathbb{R});\times)$

L'égalité est définie par :

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \\ e = e' \\ f = f' \\ g = g' \\ h = h' \\ i = i' \end{cases}$$

b)Cas particulier :

1)la matrice : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice unitaire et on a : $A \times I_3 = A \quad \forall A \in M_3(\mathbb{R})$

2)la matrice : $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice nulle et on a : $A + 0 = A \quad \forall A \in M_3(\mathbb{R})$

Exercice1 : on considére la matrice suivante :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calculer A^2 et A^3

et en déduire $A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

solution :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons par recurrence que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$ vraie si n=1

b)supposons que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c)montrons que : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

II) parties stables pour une Lois de composition interne :

1)définition1 : Soient $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne
Soit F une partie non vide de E.
F est stable pour $*$ ⇔ ∀(x, y) ∈ F^2, x ∗ y ∈ F.

2) Exemples :

a) l'ensemble : $S = \{-1;1\}$ est une partie stable de $(\mathbb{R};\times)$ mais il n'est pas stable dans $(\mathbb{R};+)$

Car : $-1 \in S$ et $1 \in S$ mais $-1+1=0 \notin S$

b)Dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres pairs est stable pour l'addition (la somme de deux nombres pairs est un nombre pair)ou pour la multiplication (le produit de deux nombres pairs est un nombre pair) alors que l'ensemble des nombres impairs est stable pour la multiplication (le produit de deux nombres impairs est un nombre impair) mais n'est pas stable pour l'addition(la somme de deux nombres impairs n'est pas toujours un nombre impair).

2) Dans $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});\circ)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ .l'ensemble des injections, l'ensemble des surjections et l'ensemble des bijections et l'ensemble des applications affines sont stables pour $\circ$ (la composée de deux injections (resp. deux surjections, deux bijections, deux affines) est une injection (resp. une surjection, une bijection, affines)).

l'ensemble des symetries axials n'est pas une partie stable dans $(\mathrm{T};\circ)$ (car la composée de deux symetries axials d'axes paralleles est une translation et non une symetrie axial

Exercice2 :on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y = xy-3x-3y+12$;

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et soit : $S =]3;+\infty[$

Monter que S est une partie stable pour $(\mathbb{R};*)$

Solution : soit $x \in S$ et $y \in S$

Montrons que : $x*y \in S$?

$x*y-3 = xy-3x-3y+9 = x(y-3)-3(y-3)$

$x*y-3 = (y-3)(x-3)$

or $x \in S =]3;+\infty[\Leftrightarrow x \succ 3$ et $y \in]3;+\infty[\Leftrightarrow y \succ 3$

donc : $x*y-3 \succ 0$ donc : $x*y \in]3;+\infty[= S$ cqfd

donc : S est une partie stable pour $(\mathbb{R};*)$

3) définition2 : si $(E;*)$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne et F une partie stable dans $(E;*)$ alors $*$ est une lois de composition interne dans F et on l'appelle la lois induite sur F

III) Propriétés des lois de composition interne

Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne sur E. $*$ peut avoir ou non une ou plusieurs des propriétés suivantes :

1) Commutativité :

Définition1 : $*$ est commutative $\Leftrightarrow \forall(x, y) \in E^2$ $x * y = y * x$.

2) Associativité

Définition 2 : $*$ est associative $\Leftrightarrow \forall(x, y, z) \in E^3$ $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Si $*$ est associative, les expressions $(x * y) * z$ et $x * (y * z)$ peuvent se noter tout simplement : $x * y * z$.

Exemples : 1) L'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont commutatives et associatives

mais la soustration n'est ni commutatives ni associatives en effet : $2-3 \neq 3-2$ et

$2-(3-1) \neq (2-3)-1$

2) L'addition et la multiplication dans $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ sont commutatives et associatives

3) L'addition dans V_2 et V_3 est commutative et associative

4) La loi $\circ$ dans $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});\circ)$ est associative mais non commutative (en général ($f \circ g \neq g \circ f$).

Ex : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=2 \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto g(x)=x+2 \end{array}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $(f \circ g)(x) = 2$ et $(g \circ f)(x) = 4$

On a : $(f \circ g)\circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$

$\forall (f;g;h) \in (F(\mathbb{R};\mathbb{R}))^3$

5) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x * y = 2x + 3y - 1$

a) $2*3 = 2\times2+3\times3-1 = 12$

$3*2 = 2\times3+3\times2-1 = 11$

On a : $2*3 \neq 3*2$

Donc :la loi $*$ est non commutative

b) $(1*1)*1 = (2\times1+3\times1-1)*1 = 4*1 = 10$

$1*(1*1) = 1*4 = 4*1 = 13$

On a : $1*(1*1) = (1*1)*1$

Donc :la loi $*$ est non associative

6) l'intersection et la réunion sont des lois commutatives et associatives dans $P(E)$

7) la loi $\circ$ dans : $(T_r;\circ)$; $(H_O;\circ)$; $(R_O;\circ)$

Est commutative et associative

5)le produit vectoriel dans V_3 n'est pas commutative : ($\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i}$)

6) le produit dans $M_2(\mathbb{R})$ n'est pas commutative :

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Donc on a : $A \times B \neq B \times A$

Remarque : si la loi est commutative et associative et on utilusant une notation additive ou multiplicative on a les écritures suivantes : $n \in \mathbb{N}$

1)Notation additive

a) $a+b=b+a$ b) $(a+b)+c=b+(a+c)$

c) $\underbrace{a+a+...+a}_{nfois} = na$ d) $na+ma=(n+m)a$

2)Notation multiplicative

a) $a\times b=b\times a$ b) $(a\times b)\times c=b\times(a\times c)$

c) $\underbrace{a\times a\times...\times a}_{nfois} = a^n$ d) $a^n \times a^m = a^{n+m}$

Exercice3 :1) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b=a+b-3ab$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$

Monter que $*$ est commutative et associative

2) on muni $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne T

définit par : $(a;b)\mathrm{T}(x;y)=(ax;ay+b)$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$

et $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Monter que T est ni commutative et ni associative dans $\mathbb{R}^2$

Solution:1) Soit : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

a) On a : $a*b=a+b-3ab=b+a-3ba=b*a$

Donc : $*$ est commutative

b)

$(a*b)*c=(a+b-3ab)*c=a+b-3ab+c-3(a+b-3ab)c$

$(a*b)*c=a+b+c-3(ab+ac+bc)+9abc$

et on a :

$a*(b*c)=a*(b+c-3bc)=a+(b+c-3bc)-3a(b+c-3bc)$

$a*(b*c)=a+b+c-3(ab+ac+bc)+9abc$

Donc : $(a*b)*c=a*(b*c)$

Donc : $*$ est associative

2)a)on a : $(1;3)\mathrm{T}(2;0)=(1\times2;1\times0+3)=(2;3)$

$(2;0)\mathrm{T}(1;3)=(2\times1;2\times3+0)=(2;6)$

Donc : $(1;3)\mathrm{T}(2;0)\neq(2;0)\mathrm{T}(1;3)$ donc : T n'est pas commutative

b)

$((1;3)\mathrm{T}(2;0))\mathrm{T}(5;7)=(2;6)\mathrm{T}(5;7)=(2\times5;2\times7+6)=(10;20)$

$(1;3)\mathrm{T}((2;0)\mathrm{T}(5;7))=(1;3)\mathrm{T}(2\times5;2\times7+0)=(1;3)\mathrm{T}(10;14)$

$(1;3)\mathrm{T}((2;0)\mathrm{T}(5;7))=(1\times10;1\times14+3)=(10;17)$

Donc : $((1;3)\mathrm{T}(2;0))\mathrm{T}(5;7)\neq(1;3)\mathrm{T}((2;0)\mathrm{T}(5;7))$

donc : T n'est pas associative

3) Elément neutre

Définition : Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne sur E.
(E ; $*$) admet un élément neutre si et seulement si :
$\exists e\in E\ \forall x\in E,\ e*x=x*e=x$.
On dit aussi que e est l'élément neutre pour la loi $*$ dans E.

⇨ Commentaire .

⬨ Notez bien l'ordre des quantificateurs :
$\exists e\in E/\ \forall x\in E$, ... qui dit que e est précis et ne dépend pas de x, et non pas $\forall x\in E,\ \exists e\in E/$...
qui permettrait à e de changer quand x change.
⬨ Si on sait que la loi $*$ est commutative, une et une seule des deux égalités ($\forall x\in E$, $x*e=x$ ou $\forall x\in E$, $e*x=x$) ci-dessus suffit.

Théorème : Si $*$ admet un élément neutre dans E. celui-ci est unique.
Démonstration : Soient e et e′
deux éléments neutres (pas nécessairement distincts). Alors $e=e*e'=e'$

Exemples:

1)1 est l'élément neutre dans les ensembles :

$(\mathbb{N};\times)$; $(\mathbb{Z};\times)$; $(\mathbb{Q};\times)$ $(\mathbb{R};\times)$;$(\mathbb{C};\times)$

Et 0 est l'élément neutre dans les ensembles :

$(\mathbb{N};+)$; $(\mathbb{Z};+)$; $(\mathbb{Q};+)$;$(\mathbb{R};+)$;$(\mathbb{C};+)$

2)le vecteur nul $\vec{0}$ est l'élément neutre dans les ensembles : $(V_2;+)$; $(V_3;+)$

2)la fonction nulle $\theta:x\to0$ est l'élément neutre dans l'ensemble : $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+)$

2)la fonction nulle $I_d:x\to x$ est l'élément neutre dans l'ensemble : $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});\circ)$

2) E est l'élément neutre dans: $(\mathrm{P}(E);\cap)$

$\varnothing$ est l'élément neutre dans: $(\mathrm{P}(E);\cup)$ et$(\mathrm{P}(E);\Delta)$

3)a) la matrice : $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ la matrice unitaire

est l'élément neutre dans: $(M_2(\mathbb{R});\times)$

la matrice : $0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ nulle est l'élément neutre

dans: $(M_2(\mathbb{R});+)$

b) la matrice : $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ la matrice unitaire

est l'élément neutre dans: $(M_3(\mathbb{R});\times)$

la matrice : $0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ nulle est l'élément

neutre dans: $(M_3(\mathbb{R});+)$

5)dans : $(\mathbb{R};-)$ il n'ya pas d'éléments neutres

4)Elément symétrisable

Définition : Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi interne sur E possédant un élément neutre e.

soit x ∈ E. ;x admet un symétrique à gauche pour $*$

⇔ ∃x′ ∈ E/ x′ $*$ x = e.

x admet un symétrique à droite pour $*$

⇔ ∃x′ ∈ E/ x $*$ x′= e.

x admet un symétrique pour $*$

⇔ ∃x′ ∈ E/ x $*$ x′= x′ $*$ x = e.

x est symétrisable à gauche pour $*$ si et seulement si x admet un symétrique à gauche pour $*$.

x est symétrisable à droite pour $*$ si et seulement si x admet un symétrique à droite pour $*$.

x est symétrisable pour $*$ si et seulement si x admet un symétrique pour $*$.

⇨ **Commentaire :**

⋄ Notez que ici, on fournit x′ après avoir fourni x (soit x ∈ E...∃x′ ∈ E...) et donc bien sûr, x′ varie quand x varie.

⋄ Si on sait que la loi $*$ est commutative, une et une seule des deux égalités ci-dessus suffit.

Remarques et exemples:

1)Dans : $(\mathbb{Z};+)$; $(\mathbb{Q};+)$;$(\mathbb{R};+)$;$(\mathbb{C};+)$ tout element a admet un symétrique et s'appelle l'opposé on le note $-a$

2) a)Dans : $(\mathbb{Q}^*;\times)$;$(\mathbb{R}^*;\times)$;$(\mathbb{C}^*;\times)$ tout element a admet un symétrique et s'appelle l'inverse on le note $\frac{1}{a}$ ou a^{-1}

(Ainsi, l'égalité $i^2 = -1$ qui s'écrit encore i × (−i) = 1 qui signifier que i et −i sont inverses l'un de l'autre

b) Dans : $(\mathbb{C};\times)$ l' element 0 n'admet pas de symétriques

3) Dans : $(V_2;+)$; $(V_3;+)$ tout vecteur $\vec{u}$ admet un symétrique et s'appelle l'opposé on le note $-\vec{u}$

4) Dans : $(\mathrm{P}(E);\Delta)$ tout partie A de E different de E n'admet pas de symétriques

5) Dans : $(\mathrm{P}(E);\cup)$ une partie A de E admet un symétrique c'est lui-même : (car $A\Delta A=\varnothing$)

6)a) Dans : $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}};\times\right)$ tout element $\neq\overline{0}$ admet un symétrique

b)Dans : $\left(\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}};\times\right)$ l' element $\overline{2}$ n'admet pas de symétriques

7) Dans : $(M_2(\mathbb{R});+)$ tout matrice $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ admet un symétriques c'est la matrice : $-A=\begin{pmatrix}-a&-c\\-b&-d\end{pmatrix}$

7) Dans : $(M_2(\mathbb{R});\times)$ la matrice $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ n'admet pas de symétriques

8) Dans : $(T_r;\circ)$(ensemble translations) tout translation $t_{\vec{v}}$ admet un symétrique : $(t_{\vec{v}})^{-1}$

Et on a : $(t_{\vec{v}})^{-1}=t_{-\vec{v}}$

9) Dans : $(R_O;\circ)$ (ensemble rotations) tout rotation $r(O;\alpha)$ admet un symétrique : $(r(O;\alpha))^{-1}$

Et on a : $(r(O;\alpha))^{-1} = r(O;-\alpha)$

10)Si $*$ est la composition des applications de E dans E .les applications de E dans E qui admettent un symétrique pour la loi $\circ$ sont les bijections de E sur E. Le symétrique d'une bijection f pour la loi $\circ$ n'est autre que sa réciproque f^{-1}

Théorème : Soit x un élément de E.
Si $*$ est associative, possède un élément neutre e et si x admet un symétrique pour $*$, celui-ci est unique.

Démonstration : Soit x un élément de E.
Soient x′et x″ deux éléments symétriques de x (pas nécessairement distincts).
Alors, $x'' = e * x'' = (x' * x) * x'' = x' * (x * x'') = x' * e = x'$

Théorème : Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne sur E, associative et possédant unélément neutre e.
Soient x et y deux éléments de E. Si x et y sont symétrisables et x′et y′ leurs symétriques respectifs. alors $x * y$ est symétrisable et $(x * y)' = y' * x'$

Démonstration : Soient x et y deux éléments symétrisables de E. Soient x′et y′leurs symétriques respectifs. On a : $(x * y) * (y' * x') = x * (y * y') * x'$
$= x * e * x' = x * x' = e$
$(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * x) * y = y' * e * y = y' * y = e$.
Donc, $x * y$ est symétrisable et son symétrique est $y' * x'$

5)Elément régulier (simplifiable)

Définition : Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi interne sur E. Soit $x \in E$
a)x est régulier à gauche pour $*$
$\Leftrightarrow \forall(y, z) \in E^2$, $x * y = x * z \Rightarrow y = z$.
b)x est simplifiable à droite pour $*$
$\Leftrightarrow \forall(y, z) \in E^2$, $y * x = z * x \Rightarrow y = z$.
c) x est régulier si et seulement si x est régulier à gauche et à droite.

Théorème : Si $*$ est associative et possède un élément neutre e, tout élément symétrisable est simplifiable.

Démonstration : Soit x un élément de E, symétrisable pour $*$.
Soit x′ son symétrique pour $*$. Pour $(y, z) \in E^2$
$x * y = x * z \Rightarrow x' * (x * y) = x' * (x * z)$
$\Rightarrow (x' * x) * y = (x' * x) * z \Rightarrow e * y = e * z \Rightarrow y = z$.

exemples :1)Dans : $(\mathbb{Z};+)$; $(\mathbb{Q};+)$;$(\mathbb{R};+)$; $(\mathbb{C};+)$ tout element a est regulier

Cad : $\forall(y, z) \in \mathbb{C}^2$, $a + x = a + y \Rightarrow x = y$.

2) Dans : $(\mathbb{N}^*;\times)$;$(\mathbb{Z}^*;\times)$; $(\mathbb{Q}^*;\times)$;$(\mathbb{R}^*;\times)$; $(\mathbb{C}^*;\times)$ tout element a est regulier

Exercice4 :1) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b = ab-(a+b)+2$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ 1) Monter que $*$ est commutative

2) Monter que $*$ admet un élement neutre et determiner les élements symétrisables

Solution:1) Soit : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

a) On a : $a*b = ab-(a+b)+2 = ba-(b+a)+2 = b*a$

Donc : $*$ est commutative

2)a) $\forall a\in\mathbb{R}$: $2*a = 2a-(2+a)+2 = a$ et

$a*2 = 2a-(a+2)+2 = a$

Donc 2 est l'élément neutre pour la loi $*$
b)soit $a\in\mathbb{R}$ on cherche $a'\in\mathbb{R}$ tel que : $a*a' = 2$ ($*$ est commutative) ?

$a*a' = 2 \Leftrightarrow aa'-(a+a')+2 = 2 \Leftrightarrow a'(a-1) = a$

Si : $a=1$ alors : $0=1 \Leftrightarrow a*a' = 2$ donc impossible

Si : $a\neq 1$ alors : $a' = \frac{a}{a-1}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow a*a' = 2$

Donc : $\forall a\in\mathbb{R}-\{1\}$ il admet un symétrique $a' = \frac{a}{a-1}$

Théorème :(inverse d'une matrice)

Soit $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ une matrice

Le nombre : $\Delta = ad-bc$ s'appel :déterminant de La matrice A

Si : $\Delta \neq 0$ alors La matrice A est inversible et

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & -\frac{c}{\Delta} \\ -\frac{b}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Preuve : on montre que : $AA^{-1}=A^{-1}A=I_2$

Exercice5 : on considére les matrices suivantes :

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que : $A^2-2A+I_2=0$ et en déduire que

La matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

2) calculer : B^2 et B^3 et en déduire que

La matrice B n'admet pas d'inverse

Solution

1) on a : $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $-2A+I_2=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

donc : $A^2-2A+I_2=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$

$A^2-2A+I_2=0 \Leftrightarrow A(A-2I_2)=-I_2 \Leftrightarrow A(2I_2-A)=I_2$

Et $A^2-2A+I_2=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (2I_2-A)A=I_2$

Donc : A est inversible et déterminer $A^{-1}=2I_2-A$

$$A^{-1}=2I_2-A=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3=B\times B^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc : $B^3=0_3$

On suppose que B admet un inverse donc il existe une matrice C tel que : $BC=CB=I_3$

Donc : $BC=I_3 \Rightarrow B^2BC=B^2I_3 \Rightarrow 0_3\times C=B^2$

$\Rightarrow 0_3=B^2$ or $B^2\neq 0_3$ contradiction

Donc : B n'admet pas d'inverse dans $M_3(\mathbb{R})$

Exercice6 : on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} / (a;b)\in\mathbb{Z}^2 \text{et } a^2\text{-}2b^2=1\right\}$$

Monter que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

Solution : soit $M_{(a;b)}\in E$ et $M_{(x;y)}\in E$

Donc : $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$ et $a^2\text{-}2b^2=1$

Et : $M_{(x;y)}=\begin{pmatrix} x & y\sqrt{2} \\ y\sqrt{2} & x \end{pmatrix}$ et $x^2\text{-}2y^2=1$

Montrons que : $M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}\in E$?

$$M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}=\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x & y\sqrt{2} \\ y\sqrt{2} & x \end{pmatrix}$$

$$M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}=\begin{pmatrix} ax+2by & (ay+bx)\sqrt{2} \\ (ay+bx)\sqrt{2} & ax+2by \end{pmatrix}$$

Donc : $M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}=M_{(ax+2by;ay+bx)}$

$(ax+2by;ay+bx)\in\mathbb{Z}^2$

Car $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$ et $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

Et on a :

$$(ax+2by)^2-2(ay+bx)^2=(a^2x^2+4b^2y^2+4abxy)$$

$$-2(a^2y^2+b^2x^2+2abxy)=(a^2x^2-2a^2y^2)-2(2b^2y^2-b^2x^2)$$

$$=a^2(x^2-2y^2)-2b^2(x^2-2y^2)=(x^2-2y^2)(a^2-2b^2)=1\times1=1$$

donc : $M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}\in E$

donc : E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

IV homomorphisme ou morphisme

« Le mot morphisme signifie à peut prés ou respecte la forme »

Définition : Soient (E, $*$) et (F, T) deux ensembles munis de lois de compositions internes

Une application f de E dans F est un morphisme de (E, $*$) dans (F, T) lorsque :

$\forall(x;y)\in E^2,\ f(x*y)=f(x)\mathrm{T}f(y)$

•t si f est bijective on dit que f est un isomorphisme

• Si E = F et $*$ = T, on parle d'endomorphisme.

• Si f est un endomorphisme bijectif, on parle d'automorphisme.

Exemples :

Exemple1 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:(\mathbb{Z};+)\to(\mathbb{Z}^*;\times) \\ x\mapsto 5^x \end{array}$

montrons que f est un morphisme de ($\mathbb{Z}$, +) dans ($\mathbb{Z}^*$, $\times$)

Solution : $\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

$f(x+y)=5^{x+y}=5^x\times5^y=f(x)\times f(y)$ donc : f est un morphisme de ($\mathbb{Z}$,+) dans ($\mathbb{Z}^*$, $\times$)

Exemple2 : soit l'application : $\begin{array}{l} g:]0;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \ln x \end{array}$

montrons que g est un morphisme de : ($]0;+\infty[$, $\times$)dans ($\mathbb{R}$, +)

Solution : $\forall(x;y)\in]0;+\infty[^2$

$$g(x\times y)=\ln(x\times y)=\ln(x)+\ln(y)=g(x)+g(y)$$

donc : g est un morphisme de ($]0;+\infty[$, $\times$) dans ($\mathbb{R}$, +)

Exemple3 : soit l'application : $\begin{array}{l} h:\mathbb{C}\to\mathbb{R} \\ z\mapsto |z| \end{array}$

montrons que h est un morphisme de : ($\mathbb{C}$, $\times$)dans ($\mathbb{R}$, $\times$)

Solution : $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

$h(z\times z')=|z\times z'|=|z|\times|z'|=h(z)\times h(z')$ donc : f est un morphisme de ($\mathbb{C}$, $\times$)dans ($\mathbb{R}$, $\times$)

Exemple4 : soit l'application :

$k:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^*$

$\theta\mapsto e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

montrons que k est un morphisme de : ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($\mathbb{C}^*$, $\times$) **Solution :** $\forall(\theta;\theta')\in\mathbb{R}^2$

$$k(\theta+\theta')=e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta+i\theta'}=e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=k(\theta)\times k(\theta')$$

donc : k est un morphisme de ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($\mathbb{C}^*$, $\times$)

Exemple5: soit l'application : $\begin{array}{l} l:\mathbb{R}\to M_2(\mathbb{R}) \\ x\mapsto\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} \end{array}$

montrons que l est un morphisme de : ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($M_2(\mathbb{R})$, $\times$) **Solution :** $\forall(x;x')\in\mathbb{R}^2$

on a : $l(x+x')=\begin{pmatrix}1 & x+x'\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$l(x)\times l(x')=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & x'\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+x'\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Donc : $l(x+x')=l(x)\times l(x')$

donc : k est un morphisme de ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($M_2(\mathbb{R})$, $\times$)

Exemple6 : soit f l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{N}\to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ n\mapsto \overline{2^n} \end{array}$

montrons que f est un morphisme de ($\mathbb{N}$, $+$)

dans ($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\times$)

Solution : $\forall(n;m)\in\mathbb{N}^2$

$f(n+m)=\overline{2^{n+m}}=\overline{2^n\times 2^m}=\overline{2^n}\times\overline{2^m}=f(n)\times f(m)$

donc : f est un morphisme de ($\mathbb{N}$, $+$)

dans ($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\times$)

Exemple7 : on muni $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne suivante : $(a;b)+(a';b')=(a+a';b+b')$;

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

Soit $A(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines :

$A(\mathbb{R};\mathbb{R})=\left\{f_{(a;b)} / \forall x\in\mathbb{R}: f_{(a;b)}(x)=ax+b\right\}$

Soit l'application : φ : $\begin{array}{l} \varphi:\mathbb{R}^2\to A(\mathbb{R};\mathbb{R}) \\ (a;b)\mapsto f_{(a;b)} \end{array}$

donc : φ est un morphisme de ($\mathbb{R}^2$, $+$)

dans ($A(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $+$)

Solution:1) Soit : $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

On a :

$\varphi((a;b)+(a';b'))=\varphi(a+a';b+b')=f_{(a+a';b+b')}$

$f_{(a+a';b+b')}(x)=(a+a')x+(b+b')=(ax+b)+(a'x+b')$

Donc : $\varphi((a;b)+(a';b'))=\varphi(a;b)+\varphi(a';b')$

donc : φ est un morphisme de ($\mathbb{R}^2$, $+$)

dans ($A(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $+$)

Théorème : soit f un homomorphisme de (E, $*$) dans (F, T) alors :

1) $f(E)$ est une partie stable dans (F, T)

2)si $*$ est commutative dans (E, $*$) alors T est commutative dans ($f(E)$, T)

3)si $*$ est associative dans (E, $*$) alors T est associative dans ($f(E)$, T)

4)si $*$ est admet un élément neutre e dans (E, $*$) alors $f(e)$ est un élément neutre dans ($f(E)$, T)

5) si $*$ est admet un élément neutre e dans (E, $*$) Et si x est admet un symétrique x' dans (E, $*$) alors $y=f(x)$ admet un symétrique dans ($f(E)$, T) c'est $y'=f(x')$ cad : $(f(x))'=f(x')$

Preuve :1) soient : $y_1\in f(E)$ et $y_2\in f(E)$

Donc : $\exists x_1\in E / f(x_1)=y_1$ et $\exists x_2\in E / f(x_2)=y_2$

$y_1\mathrm{T}y_2=f(x_1)\mathrm{T}f(x_2)=f(x_1*x_2)\in f(E)$

Car : $x_1*x_2\in E$ et effet : $*$ la loi de composition interne dans E

2) soient : $y_1\in f(E)$ et $y_2\in f(E)$

Donc : $\exists(x_1;x_2)\in E^2 / f(x_1)=y_1 et f(x_2)=y_2$

$y_1\mathrm{T}y_2=f(x_1)\mathrm{T}f(x_2)=f(x_1*x_2)$

Car f un homomorphisme

$=f(x_2*x_1)$

Car $*$ est commutative dans (E, $*$)

$=f(x_2)\mathrm{T}f(x_1)$ Car f un homomorphisme

$=y_2\mathrm{T}y_1$ Cqfd

3) soient : $y_1\in f(E)$ et $y_2\in f(E)$ et $y_3\in f(E)$

Donc:

$\exists(x_1;x_2;x_3)\in E^3 / f(x_1)=y_1 et f(x_2)=y_2 et f(x_3)=y_3$

$(y_1 \mathrm{T} y_2)\mathrm{T} y_3=(f(x_1)\mathrm{T} f(x_2))\mathrm{T} f(x_3)=f(x_1*x_2)\mathrm{T} f(x_3)$

Car f un homomorphisme

$=f((x_1*x_2)*x_3)=f(x_1*(x_2*x_3))$

Car $*$ est associative dans (E, $*$) et f un homomorphisme

$=f(x_1)\mathrm{T} f(x_2*x_3)=f(x_1)\mathrm{T}(f(x_2)\mathrm{T} f(x_3))$

$=y_1\mathrm{T}(y_2\mathrm{T} y_3)$ Cqfd

4) soie: $y\in f(E)$ donc : Donc : $\exists x\in E / f(x)=y$

On pose : $f(e)=e'$ donc : $e'\in f(E)$ car $e\in E$

$y\mathrm{T} e'=f(x)\mathrm{T} f(e)=f(x*e)=f(x)=y$

Car f un homomorphisme et e élément neutre dans (E, $*$)

De même on montre que : $e'\mathrm{T} y=y$

Donc: $f(e)$ est un élément neutre dans ($f(E)$, T)

5) soit : x' le symétrique de x dans (E, $*$)
On a donc : $x*x'=e$ et $x'*x=e$

Donc : $f(x*x')=f(e)$ et $f(x'*x)=f(e)$

puisque f un homomorphisme on a donc :

$y\mathrm{T} f(x')=f(e)$ et $f(x')\mathrm{T} y=f(e)$

On a $f(e)$ élément neutre de $(f(E);\mathrm{T})$

Donc $f(x')$ est le symétrique dans ($f(E)$, T)

De $f(x)=y$ cqfd

Exercice7 :soient $a\in]2;+\infty[$ et $b\in]2;+\infty[$

On pose : $a*b=(a-2)(b-2)+2$

1)montrer que $*$ est une loi de composition interne Dans $I=]2;+\infty[$

2)soit l'application définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ vers I

tel que : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x} \quad \forall x\in\mathbb{R}^{*+}$

a) montrer que f est un morphisme de ($\mathbb{R}^{*+}$, $\times$) dans (I , $*$)
b) en déduire que $*$ est associative et admet un élément neutre a determiner

solution :1) soient $a\in]2;+\infty[$ et $b\in]2;+\infty[$

$a\in]2;+\infty[\Rightarrow a\succ 2$ et $b\in]2;+\infty[\Rightarrow b\succ 2$

Donc : $(a-2)(b-2)\succ 0$

Donc : $(a-2)(b-2)+2\succ 2$

Donc : $a*b\in]2;+\infty[=I$

Donc :$*$ est une loi de composition interne Dans $I=]2;+\infty[$

2) soient $x\in\mathbb{R}^{*+}$ et $y\in\mathbb{R}^{*+}$

$$f(x\times y)=\frac{2xy+1}{xy}$$

$$f(x)*f(y)=\frac{2x+1}{x}*\frac{2y+1}{y}=\left(\frac{2x+1}{x}-2\right)\left(\frac{2y+1}{y}-2\right)+2$$

$$=\frac{1}{x}\times\frac{1}{y}+2=\frac{2xy+1}{xy}$$

Donc : $f(x\times y)=f(x)*f(y)\ \forall(x;y)\in(\mathbb{R}^{*+})^2$

Donc : f est un morphisme de ($\mathbb{R}^{*+}$, $\times$) dans (I , $*$)

b)puisque $\times$ est commutative dans ($\mathbb{R}^{*+}$, $\times$)et f un homomorphisme de ($\mathbb{R}^{*+}$, $\times$) dans (I , $*$) alors $*$ est commutative dans I

et on a 1 est l'élément neutre dans ($\mathbb{R}^{*+}$, $\times$)

alors : $f(1)=3$ est l'élément neutre dans I

Exercice8 :on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b=ab+(a^2-1)(b^2-1)$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ 1) Monter que $*$ est commutative

2) Monter que $*$ n'est pas associative

3) est ce que la loi $*$ admet un élement neutre ?

4)resoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $2*x=5$ b) $x*x=1$

Solution:1) Soit : soit :$(a;b)\in\mathbb{R}^2$

On a : $a*b=ab+(a^2-1)(b^2-1)=ba+(b^2-1)(a^2-1)$

car la multiplication dans $\mathbb{R}$ est commutative

Donc :$a*b=b*a$ par suite $*$ est commutative

2) on a : $(-1*0)*2=0*2=-3$

Et $-1*(0*2)=-1*-3=3$

Donc : $(-1*0)*2\neq-1*(0*2)$

Donc : $*$ n'est pas associative

4)on a : $a*1=1*a=a \quad \forall a\in\mathbb{R}$

Donc : 1 est l'élément neutre pour la loi $*$

(l'élement neutre est unique)

4) a)on va resudre l'équation : $2*x=5$

$$2*x=5\Leftrightarrow 2x+3(x^2-1)=5\Leftrightarrow 3x^2+2x-8=0$$

$\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=\frac{4}{3}$ donc : $S=\left\{-2;\frac{4}{3}\right\}$

b)on va resudre l'équation : $x*x=1$

$$x*x=1\Leftrightarrow x^2+(x^2-1)^2=1\Leftrightarrow x^4-x^2=0$$

$\Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$ ou $x=-1$

donc : $S=\{-1;0;1\}$

Exercice9 :on muni $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne suivante : $(a;b)*(a';b')=(a\times a';b\times b')$;

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

1) Monter que $*$ est commutative et associative

2) Monter que $*$ admet un élement neutre et determiner dans $\mathbb{R}^2$ les élements symétrisables Pour la loi $*$

3)soit : $S=\mathbb{R}\times\{0\}$

a)montrer que S est une partie stable de($\mathbb{R}^2$,$*$)

b) Monter que (S ,$*$) admet un élement neutre et comparer les les élements neutres de ($\mathbb{R}^2$,$*$) et de (S ,$*$)

Solution:1) a) Montrons que $*$ est commutative ?

Soit : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $(a';b')\in\mathbb{R}^2$

$$(a;b)*(a';b')=(a\times a';b\times b')=(a'\times a;b'\times b)=(a';b')*(a;b)$$

Donc :$*$ est commutative

b) Montrons que $*$ est associative?

Soit: $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ et$(a'';b'')\in\mathbb{R}^2$

$$((a;b)*(a';b'))*(a'';b'')=(a\times a';b\times b')*(a'';b'')$$

$$((a;b)*(a';b'))*(a'';b'')=(a\times a'\times a'';b\times b'\times b'')$$

On aussi : $(a;b)*((a';b')*(a'';b''))=(a;b)*(a'\times a'';b'\times b'')$

$$(a;b)*((a';b')*(a'';b''))=(a\times a'\times a'';b\times b'\times b'')$$

Donc :

$$((a;b)*(a';b'))*(a'';b'')=(a;b)*((a';b')*(a'';b''))$$

Donc : $*$ est associative

2)a) Montrons que $*$ admet un élement neutre

Soit: $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

On a : $(a;b)*(1;1)=(a;b) \quad \forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$

Et puisque :$*$ est commutative

Alors : $*$ admet un élement neutre c'est $(1;1)$

b) determinons dans $\mathbb{R}^2$ les élements symétrisables pour la loi $*$

soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ on cherche $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$(a;b)*(a';b')=(1;1)$

$(a;b)*(a';b')=(1;1)\Leftrightarrow(a\times a';b\times b')=(1;1)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b\times b'=1\\a\times a'=1\end{cases}$ si $a\neq0$ et $b\neq0$ alors $\begin{cases}a'=1/a\\b'=1/b\end{cases}$

Donc les élements dans $\mathbb{R}^2$ symétrisablesPour la loi $*$ sont les couples $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ tel que: $a\neq0$ et $b\neq0$

Et le symétrique de $(a;b)$ est $\left(1/a;1/b\right)$ pour $*$

3)a) $S=\mathbb{R}\times\{0\}$

Soit : $(a;0)\in S$ et $(b;0)\in S$

$(a;0)*(b;0)=(ab;0)\in S$

Donc : S est une partie stable de($\mathbb{R}^2$,$*$)

b) soit :$(a;0)\in S$

on a : $(a;0)*(1;0)=(a;0)$ et $(1;0)*(a;0)=(a;0)$

donc : $(1;0)$ est élément neutre pour (S ,$*$)

et on a $(1;1)$ est élément neutre pour($\mathbb{R}^2$,$*$)

et : $(1;1)\neq(1;0)$

Exercice10 :on muni $\mathbb{C}$ de la loi de composition interne T suivante : $zTz'=z\overline{z'}$; $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

$\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$ (F, T) $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

1) étudier la commutativité et l'associativité de T

2)résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(zTz)Tz=i$

Solution :

1) la commutativité de T ?

On a : $1Ti=1\overline{i}=-i$ et $iT1=i\overline{1}=i$

Donc : $1Ti\neq iT1$ donc T non commutative

L'associativité de T ?

$(iT1)Ti=iTi=i\cdot(-i)=1$

$iT(1Ti)=iT-i=i\cdot i=-1$

Donc : $(iT1)Ti\neq iT(1Ti)$ donc T non associative

2)résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(zTz)Tz=i$

$(zTz)Tz=i\Leftrightarrow(z\overline{z})Tz=i\Leftrightarrow z\overline{z}\overline{z}=i\Leftrightarrow|z|^2\,\overline{z}=i$

On pose : $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$|z|^2\,\overline{z}=i\Leftrightarrow(x^2+y^2)(x-iy)=i$

$|z|^2\,\overline{z}=i\Leftrightarrow(x^2+y^2)x-iy(x^2+y^2)=i$

$|z|^2\,\overline{z}=i\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+y^2)x=0\\y(x^2+y^2)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=0\,ou\,x=0\\y(x^2+y^2)=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=0\\0=-1\end{cases}ou\begin{cases}x=0\\y^3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$

$|z|^2\,\overline{z}=i\Leftrightarrow z=-i$ donc : $S=\{-i\}$

Exercice11 :on muni $I=]0;+\infty[$ de la loi de composition interne $*$ suivante :

$x*y=\sqrt{x^2+y^2}\quad\forall(x;y)\in I^2$

soit f l'application définie sur I vers I

tel que : $f(x)=x^2\quad\forall x\in I$

1) montrer que : $f(x*y)=f(x)+f(y)$

2)a) montrer que $*$ est associative

b) est ce que $*$ admet un élément neutre

3)soit $a\in I$ calculer : $A=\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}$ $n\in\mathbb{N}^*$

Solution : soit $(x;y)\in I^2$

1) $f(x*y)=(x*y)^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=x^2+y^2$

$=f(x)+f(y)$ Cqfd

2) $f(x*y)=f(x)+f(y)$

Donc f est un homomorphisme et puisque

f est une bijection donc f est un isomorphismes

De $(I;*)$ dans $(I;+)$ donc : $(I;*)$ et $(I;+)$

Ont la même structures et puisque + est associative dans I alors $*$ est aussi associative

Et puisque $(I;+)$ n'admet pas d'élément neutre

alors : $(I;*)$ n'admet pas d'élément neutre

3) $f\left(\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}\right)=\underbrace{f(a)+f(a)+....+f(a)}_{nfois}$

$f(A)=nf(a)=na^2$

Et puisque f est un isomorphismes de $(I;*)$

dans $(I;+)$ donc : $A=f^{-1}(na^2)$

Et puisque : $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ donc / $A=\sqrt{na^2}=\sqrt{n}a$

Exercice12 :1) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y=x+y-xy$;$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

tel que : $f(x)=1-x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

1) montrer que f est un homomorphisme bijectif

De $(\mathbb{R};*)$ dans $(\mathbb{R};\times)$

2)en déduire que $*$ est associative et que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera

3) determiner l'ensemble des élements symétrisables pour la loi $*$

4)soit $a\in\mathbb{R}$ calculer : $A=\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}$ $n\in\mathbb{N}^*$

Solution : 1) $f(x)=1-x$

$f(x)=y\Leftrightarrow 1-x=y\Leftrightarrow x=1-y$

Donc : $f^{-1}(x)=1-x=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f^{-1}=f$

$f(x*y)=1-x*y=1-(x+y-xy)$

$=(1-x)(1-y)=f(x)\times f(y)$

Donc : f est un isomorphismes de $(\mathbb{R};*)$

dans $(\mathbb{R};\times)$

2) puisque f est un isomorphismes de $(\mathbb{R};*)$

dans $(\mathbb{R};\times)$ alors : $(\mathbb{R};*)$ et $(\mathbb{R};\times)$

Ont la même structure et puisque $\times$ est associative dans $\mathbb{R}$ alors $*$ est aussi associative dans $\mathbb{R}$ et puisque 1 est élément neutre dans

$(\mathbb{R};\times)$ alors $f^{-1}(1)=f(1)=0$ est élément neutre

dans $(\mathbb{R};*)$

3)on a 0 est élément neutre unique qui n'admet pas de symétrique dans $(\mathbb{R};\times)$ et on a $f(0)=1$

Donc : l'ensemble des élements symétrisables pour $(\mathbb{R};*)$ est $\mathbb{R}-\{1\}$

4) $f(A)=f\left(\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}\right)=\underbrace{f(a)\times f(a)\times....\times f(a)}_{nfois}$

$f(A)=(f(a))^n=(1-a)^n$

Donc : $A=f^{-1}\left((1-a)^n\right)=f\left((1-a)^n\right)=1-(1-a)^n$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien