Lois de composition interne

Exercice 1

Soit $\perp$ la loi interne définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\left(\forall (x,y)\in \mathbb{Z}^2\right)\ x\perp y = x+y-2$$

1) montrer que $\perp$ est commutative , associative dans $\mathbb{Z}$

2) montrer que $\perp$ admet un élément neutre

3) montrer que tout élément x de $\mathbb{Z}$ admet un symétrique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 2

On pose $I=\left]1,+\infty\right[$.

On considère dans I la loi $\perp$ telle que :

$$\left(\forall (x,y)\in I^2\right)\ x\perp y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$$

1) montrer que $\perp$ est interne dans I

2) a) étudier la commutativité de $\perp$

b) montrer que $\perp$ est associative

3) montrer que $\perp$ admet un élément neutre

Exercice 3

Soit a un réel strictement positif , on pose $I=\left]a,+\infty\right[$.

On considère dans I la loi $*$ telle que :

$$\left(\forall (x,y)\in I^2\right)\ x*y=(x-a)(y-a)+a$$

1) montrer que $*$ est interne dans I

2) a) étudier la commutativité de la loi $*$

b) montrer que $*$ est associative

3) montrer que $*$ admet un élément neutre

4) montrer que $J=\left]a+1,+\infty\right[$ est stable dans $(I,*)$

5) pour tout entier n tel que $n\geq 2$

on pose $x^{(n)}=\underbrace{x*x*.....*x}_{n\ fois\ x}$

Montrer que $(\forall n\geq 2)\ x^{(n)}=(x-a)^n+a$

Exercice 4

On considère dans $\mathbb{R}$ la loi interne T telle que : $\left(\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2\right)\ x\mathrm{T}y=xy-x-y+2$

1) a) étudier la commutativité de T

b) la loi T est-elle associative ?

3) montrer que T admet un élément neutre

4) montrer que $I=\left]1,+\infty\right[$ est une partie stable pour la loi T dans $\mathbb{R}$

5) montrer que tout x de I admet un symétrique x' pour la loi T dans I

Exercice 5

On pose $E=\left]-1,1\right[$.

On considère dans E la loi T telle que :

$$\left(\forall (x,y)\in E^2\right)\ x\mathrm{T}y=\frac{x+y}{1+xy}$$

1) montrer que T est interne dans E

2) a) étudier la commutativité de T

b) montrer que T est associative

3) montrer que (E,T) est un groupe commutatif