Nombres complexes

1

Le plan (P) est muni d'un r.o.d $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$; on considère les points $A(-2+3i)$ et $B(1-3i)$. Soit $M(z)$ un point du plan tel que $z\neq -2+3i$ et on pose $z'=\dfrac{z-1+3i}{z+2-3i}$

1) déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$ en fonction de argument de z'

2) a) déterminer et construire les ensembles :

$$E_1=\left\{M(z)/\ \arg(z')\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right\}$$

et $E_2=\{M(z)/\ |z'|=2\}$

b) déterminer l'affixe de F point d'intersection des deux ensembles E_2 et E_1

2

On pose $g(z)=\dfrac{1-z}{\bar{z}}$ pour tout z de $\mathbb{C}^*$

1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $g(z)=1-i$

2) a) montrer que :

$(\forall z\in\mathbb{C}^*)\ \ g(z)=\overline{g(z)}\ \Leftrightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z}+1)=0$

b) en déduire l'ensemble :

$$E=\{M(z)\in(P)/\ \ g(z)\in\mathbb{R}\}$$

3) on pose $z=re^{i\theta}$ où $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

Montrer que $1-\cos\theta=2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

puis déterminer $g(z)$ sous forme trigonométrique

3

Le plan (P) set muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. on pose $Z'=\dfrac{i(z+i)}{z-i}$ pour tout z de $\mathbb{C}-\{i\}$ et on considère les points $M(z)$ et $M'(Z')$

1) montrer que :

$(\forall z\in\mathbb{C}-\{i\})\ \ Z'\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

2) a) montrer que :

$(\forall z\in\mathbb{C}-\{i\})\ \ Z'\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow |z|=1$

b) en déduire l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels le nombre Z' est réel

3) montrer que :

$(\forall z\in\mathbb{C}-\{i,-i\})\ \ \arg(Z')=\dfrac{\pi}{2}+\arg\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)\ [2\pi]$

puis déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Z'\in\mathbb{R}^{-*}$

4) soit F l'application du plan (P) qui à tout point $M(z)$ fait associer le point $M'(Z')$

Montrer que $Z'-i=-\dfrac{2}{z-i}$ en déduire l'image du cercle (ζ) de centre $A(i)$ et de rayon r

5) soit n un entier tel que $n>2$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\ (Z')^n=i^n$

a) vérifier que $(E)\Leftrightarrow(z+i)^n=(z-i)^n$

en déduire que les images des solutions de (E) sont alignés

b) montrer que les solutions de (E) s'écrient $\cot an\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ où $k\in\{1,\ldots\ldots,n-1\}$