Probabilités

Exercice1 : Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien Ya-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Solution : Notons E ; H, M et S les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés mariés, des employés syndiqués.

L'énoncé donne:
card(E)=800, card(H)=300, card(S)=352, card(M)=424, card(H∩S) =188, card(H∩M) =166 card(S∩M) =208, card(H∩M∩S) =144

On cherche : $card\left(\overline{H}\cap\overline{M}\cap\overline{S}\right)$

où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E .
D'après les lois de Morgan
$card\left(\overline{H}\cap\overline{M}\cap\overline{S}\right)=card\left(\overline{H\cup M\cup S}\right)$ On applique la formule du crible de Poincaré :
card(H∪M∪S)=card(H)+card(M)+card(S)−card(H∩M)−card(H∩S)−card(M∩S)+card(H∩M∩S)

On en déduit :
card(H∪M∪S)=658

$$card\left(\overline{H}\cap\overline{M}\cap\overline{S}\right)=800-658=142$$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées

Exercice2 : Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7.
On tire 2 boules de l'urne simultanément
1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair ?
3. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair ?

Solution :1) Il s'agit clairement d'une situation de combinaisons puisque chaque tirage est une permutation de 2 éléments dans un ensemble de 7 éléments (simultanément) donc le nombre de tirages possibles est : $C_7^2=\frac{A_7^2}{2!}=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

2)pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair il suffit de tirer 2 boules pairs **ou** tirer 2 boules impairs
Donc : le nombre est :

$$C_4^2+C_3^2=\frac{A_4^2}{2!}+\frac{A_3^2}{2!}=\frac{4\times3}{2\times1}+\frac{3\times2}{2\times1}=6+3=9$$

Car il ya 3boules pairs et 4boules impairs

3) pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair il suffit de tirer une boule paire **et** tirer une boule impaire :
Donc : le nombre est : $C_4^1\times C_3^1=4\times3=12$

Exercice3 : Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.
1)1-1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
1-2) Combien Ya-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
1-3) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?
1-4) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4?
2)Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
2-1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
2-2) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
2-3) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6?

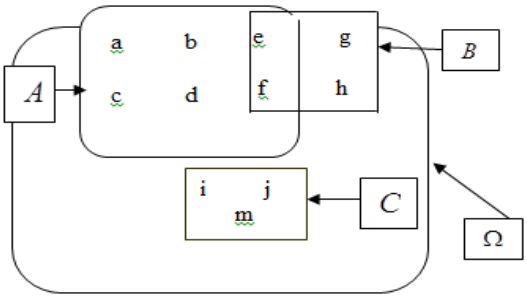
Solution :1)1-1) Il y a 9^3=9×9×9=729 codes possibles.
1-2) Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2,4,6,8). Il y a donc 9×9×4=324 tels codes.
1-3) On va compter par différence. Il y a 8×8×8 codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc 9×9×9−8×8×8=217codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.
1-4) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc 3×8×8=192 tels codes.

2) 2-1)On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc 9×8×7= 504 choix possibles

2-2) Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc 8×7×5=280 tels codes

2-3) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de 8×7×3=168.

Exercice4 : le diagramme suivant représente la répartition des élèves d'une classe suivant leur préoccupation sportive



A Pratiquent le football

B Pratiquent le basket-ball

C Pratiquent le Rugby

On choisit au Hazard un élevé de cette classe

1)écrire en extension les évènements suivants :

A ; B ; C ; Ω ; $\overline{A}$; $\overline{C}$; $A\cap B$; $A\cup B$; $A\cap C$ et $A\cup C$

2)calculer : $P(A)$; $P(B)$; $P(C)$; $P(A\cap B)$; $P(A\cup B)$; $P(A\cap C)$; $P(A\cup C)$; $P(\overline{A})$; $P(\overline{C})$

3)comparer : $1-p(A)$ et $p(\overline{A})$

$1-p(C)$ et $p(\overline{C})$

4)a)verifier que : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

b) verifier que : $P(A\cup C)=P(A)+P(C)$

c) verifier que : $P(C)=P(\{i\})+P(\{j\})+P(\{m\})$

Solutions :1) $A=\{a;b;c;d;e;f\}$ et $B=\{e;f;g;h\}$

et $C=\{i;j;m\}$ et $\Omega=\{a;b;c;d;e;f;g;h;i;j;m\}$

$\overline{A}=\{g;h;i;j;m\}$ et $\overline{C}=\{a;b;c;d;e;f;g;h\}$

$A\cap B=\{e;f\}$ et $A\cup B=\{a;b;c;d;e;f;g;h\}$

Et $A\cap C=\varnothing$ et $A\cup C=\{a;b;c;d;e;f;i;j;m\}$

2) $p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{6}{11}$ et $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{4}{11}$

$p(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{3}{11}$ et $p(A\cap B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card\Omega}=\frac{2}{11}$

$p(A\cup B)=\frac{Card(A\cup B)}{Card\Omega}=\frac{8}{11}$ et $p(A\cap C)=\frac{Card(A\cap C)}{Card\Omega}=\frac{0}{11}=0$

$p(A\cup C)=\frac{Card(A\cup C)}{Card\Omega}=\frac{9}{11}$ et $p(\overline{A})=\frac{Card\overline{A}}{Card\Omega}=\frac{5}{11}$

$p(\overline{C})=\frac{Card\overline{C}}{Card\Omega}=\frac{8}{11}$

3) $1-p(A)=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}=p(\overline{A})$

$1-p(C)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}=p(\overline{C})$

4)a) $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{6}{11}+\frac{4}{11}-\frac{2}{11}=\frac{8}{11}=P(A\cup B)$

b) $P(A)+P(C)=\frac{6}{11}+\frac{3}{11}=\frac{9}{11}=P(A\cup C)$

c) $P(\{i\})+P(\{j\})+P(\{m\})=\frac{1}{11}+\frac{1}{11}+\frac{1}{11}=\frac{3}{11}=P(C)$

Exercice5 : On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

On considère les événements suivants :

A : « On obtient un nombre impair »

B : « On obtient un multiple de 3 »

Calculer la probabilité de l'évènement A∪ B.

Solution : $p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ et $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

A∩ B est l'événement élémentaire :

« On obtient un 3 », donc : $A\cap B=\{3\}$

$p(A\cap B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card\Omega}=\frac{1}{6}$

On a : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Donc : $P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

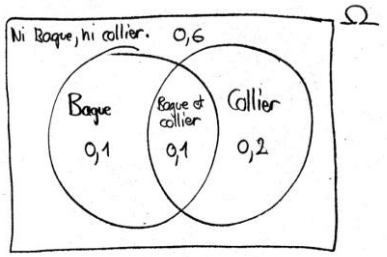
Exercice6 : 60% des élèves d'une école ne portent ni bague ni collier. 20% portent une bague et 30% ont un collier.

Si un des élèves est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il porte :

a) une bague ou un collier ?

b) une bague et un collier ?

Solution : Le diagramme de la situation est :



D'où on tire facilement qu'un élève tirer au hasard porte "une bague ou un collier" avec une probabilité de 0.4 et "une bague et un collier" avec une probabilité de 0.1.

On peut également résoudre le problème en utilisant l'algèbre des ensembles, soit les probabilités :

i) P(B)= probabilité de "porter une bague" = 0.20,

ii) PC) = probabilité de "porter un collier" = 0.30,

iii) P($\overline{B} \cap \overline{C}$) = probabilité de l'événement "ne porte pas de bague et ne porte pas de collier (ni bague, nicollier) = 0.60.

a) On applique la loi de Morgan à l'événement P($\overline{B} \cap \overline{C}$)), ce qui donne :

P($\overline{B} \cap \overline{C}$)) = P($\overline{B \cup C}$)

c = 0.6 donc P($\overline{B \cup C}$)= 1− P(B ∪C)

c = 1−0.6 = 0.4

b) P(B ∪C) = P(B)+ P(C)− P(B ∩C)

P(B ∩C) = P(B)+ P(C)− P(B ∪C)

P(B ∩C) = 0.2+0.3−0.4 = 0.1

Exercice7 : dans une classe de terminale 54% ont declarer aimer le foot et 32% ont declarer aimer le basquette et 15% ont declarer aimer les deux sports

On choisie au hasard un éleve de cette classe.

Quelle est la probabilité des evenements suivants

1) E_1 « l'éléve aime le foot mais pas le basquette»

2) E_2 «l'élève aime le foot ou le basquette ou les deux a la fois»

3) E_3 «l'élève aime une seule sport»

4) E_4 « l'éléve n'aime ni le foot ni basquette »

Solution :1)

On note Ω l'univers l' ensemble des éléves de la classe. Il y a équiprobabilité . On considére les événements suivants :

F « l'éléve aime le foot »

B « l'éléve aime le basquette »

On a donc : $p(F)=0,54$ et $p(B)=0,32$

et $p(F\cap B)=0,15$

on utilisant un diagramme on vérifie que :

$E_1 = F\cap\overline{B}$: les éléves qui aiment le foot mais pas le basquette

On remarque que : $\begin{cases} F=\left(F\cap\overline{B}\right)\cup\left(F\cap B\right) \\ \left(F\cap\overline{B}\right)\cap\left(F\cap B\right)=\varnothing \end{cases}$

Donc : $p(F)=p\left(F\cap\overline{B}\right)+p\left(F\cap B\right)$

Donc : $p\left(F\cap\overline{B}\right)=p(F)-p\left(F\cap B\right)$

Donc : $p\left(F\cap\overline{B}\right)=0,39$ donc : $p\left(E_1\right)=0,39$

2) On a : $E_2 = F\cup B$

donc : $p\left(E_2\right)=p\left(F\cup B\right)=p(F)+p(B)-p\left(F\cap B\right)$

donc : $p\left(E_2\right)=0,71$

3) On a : $E_3=\left(F\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{F}\cap B\right)$ et $\left(F\cap\overline{B}\right)\cap\left(\overline{F}\cap B\right)=\varnothing$

Ainsi : $p\left(E_3\right)=p\left(F\cap\overline{B}\right)+p\left(\overline{F}\cap B\right)$

Et puisque : $p\left(\overline{F}\cap B\right)=p(B)-p\left(B\cap F\right)$

Alors : $p\left(\overline{F}\cap B\right)=0,17$ donc : $p\left(E_3\right)=0,56$

4) On a : $E_4=\overline{F\cup B}$

$p\left(E_4\right)=p\left(\overline{F\cup B}\right)=1-p\left(F\cup B\right)=0,29$

Exercice8 : Une urne contient 4 boules blanches indiscernables, 3noires, 5 rouges.

On tire simultanément trois boules de l'urne

1) déterminer :le nombre de tirages possibles : $card(\Omega)$

2) déterminer la probabilité des évènements suivants :

B" tirer trois boules blanches"

N "tirer trois boules noirs»

R "tirer trois boules rouges»

D "d'obtenir trois boules de couleurs différentes»

M" tirer trois boules de même couleur "

E" tirer 2 boules blanches seulement»

Solution :

1) $card(\Omega)=C_{12}^3$

$$C_{12}^3=\frac{12!}{3!(12-3)!}=\frac{12!}{3!9!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{3!9!}=\frac{12\times11\times10}{3!}=\frac{6\times2\times11\times10}{6}=220$$

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{C_4^3}{28}=\frac{4}{28}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$

$p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}==\frac{C_3^3}{28}=\frac{1}{28}$; $p(R)=\frac{CardR}{Card\Omega}==\frac{C_5^3}{28}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$

$$C_5^3=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10$$

$$p(D)=\frac{CardD}{Card\Omega}==\frac{C_3^1\times C_4^1\times C_5^1}{28}=\frac{3\times4\times5}{220}=\frac{15}{55}=\frac{3}{11}$$

M est l'évènement contraire de D cad $M=\overline{D}$

Donc : $p(M)=p(\overline{D})=1-p(D)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}$

$p(E)=\frac{CardE}{Card\Omega}==\frac{C_4^2\times C_8^1}{220}=\frac{6\times 8}{220}=\frac{12}{55}$

Exercice9: Une urne contient 4 boules blanches, et 5 noires.

On tire Successivement trois boules de l'urne au hasard et sans remise

1) déterminer :le nombre de tirages possibles : $card(\Omega)$

2) déterminer la probabilité des évènements suivants :

B" tirer trois boules blanches"

N "tirer trois boules noirs»

M" tirer trois boules de même couleur "

D "d'obtenir trois boules de couleurs différentes»

E" tirer 2 boules blanches seulement»

Solution :1) $card(\Omega)=A_9^3=9\times 8\times 7=504$

2)

1ere tirage	2ere tirage
B	$\overline{B}$

1ere tirage	2ere tirage
$\overline{B}$	B

$p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=$

$=\frac{A_4^3}{504}=\frac{4\times 3\times 2}{9\times 8\times 7}=\frac{4\times 3\times 2}{3\times 3\times 8\times 7}=\frac{1}{3\times 7}=\frac{1}{21}$

$p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}=\frac{A_5^3}{504}=\frac{5\times 4\times 3}{9\times 8\times 7}=\frac{5\times 4\times 3}{3\times 3\times 4\times 2\times 7}=\frac{5}{3\times 2\times 7}=\frac{5}{42}$

$p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{A_4^3+A_5^3}{504}=\frac{4\times 3\times 2+5\times 4\times 3}{504}=\frac{24+60}{504}=\frac{84}{504}=\frac{1}{6}$

D est l'évènement contraire de M cad $D=\overline{M}$

Donc : $p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

Calcul de la probabilité de l'évènement E

On a 3 cas possibles :

1ere tirage	2ere tirage	3ere tirage
$\overline{B}$	B	B

1ere tirage	2ere tirage	3ere tirage
B	B	$\overline{B}$

1ere tirage	2ere tirage	3ere tirage
B	$\overline{B}$	B

$p(E)=\frac{3A_4^2\times A_5^1}{9\times 8\times 7}=\frac{3\times 4\times 3\times 5}{9\times 8\times 7}=\frac{5}{14}$

Exercice10 : Une urne contient 3 boules blanches, et 4 noires.

On tire Successivement deux boules de l'urne au hasard avec remise

1) déterminer :le nombre de tirages possibles 2)

2)déterminer la probabilité des évènements suivants :

B" tirer deux boules blanches"

N "tirer deux boules noirs»

M" tirer deux boules de même couleur "

D "d'obtenir deux boules de couleurs différentes»

E" tirer une boule blanche seulement»

Solution :1) $card(\Omega)=7\times 7=7^2=49$

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{3\times 3}{49}=\frac{9}{49}$

$p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}=\frac{4\times 4}{7\times 7}=\frac{16}{49}$

$p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{3\times 3+4\times 4}{7\times 7}=\frac{25}{49}$

D est l'évènement contraire de M cad $D=\overline{M}$

Donc : $p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{25}{49}=\frac{24}{49}$

Calcul de la probabilité de l'évènement E

On a 2 cas possibles

$p(E)=\frac{3\times 4+3\times 4}{42}=\frac{2\times 3\times 4}{7\times 7}=\frac{24}{49}$

Types de tirages	Ordre	Répétitions d'éléments	Dénombrement
Successifs Avec remise	On tient compte	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p p-listes
Successifs Avec remise	de l'ordre	Un élément n'est tiré	A_n^p arrangements
Simultanés	L'ordre n'intervient pas	qu'une seule fois	C_n^p combinatoires

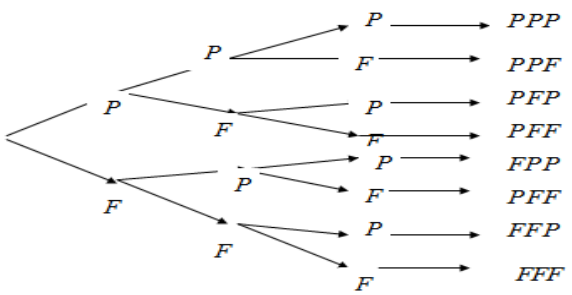
Exercice11:

On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite.

1) Donner la liste de tous les résultats possibles Ω_3 (exemple : PPF).(Dresser L'arbre des choix)Et calculer $card(\Omega_3)$

2) Donner la probabilité de événement suivant A « le tirage ne comporte que deux Piles exactement».

Solution :1)



2) $\Omega=\{PPP;PPF;PFP;PFF;FPP;FPF;FFP;FFF\}$

$card(\Omega)=8$

1ere fois	2ere fois	3ere fois
2	2	2

Les tirages étant équiprobables, on a :

$p(A)=\frac{Card4}{Card\Omega}=\frac{3}{8}$

Exercice12 : On lance deux fois de suite un dé équilibré.

1°) Représenter dans un tableau les 36 issues équiprobables.

2°) Calculer la probabilité des événements :

A : « on obtient un double » ; B : « on obtient 2 numéros consécutifs »

C : « on obtient au moins un 6 » ; D : « la somme des numéros dépasse 7 ».

Exercice13: On lance 4 fois de suite une pièce équilibrée.

1°) Dresser la liste des issues équiprobables.

2°) Quel est l'événement le plus probable :

A ou B ?

A : « 2 piles et 2 faces »

B : « 3 piles et 1 face »

Variables aléatoires

Exercice14 : Une urne contient 5 boules blanches :tel que 2 boules portent le numéro 1 et 3 boules portent le numéro 2

Et l'urne contient aussi 7boules noires dont 4 boules portent le numéro 2 et 3 boules portent le numéro 1 et toutes les Boules sont indiscernables

On tire de l'urne au hasard une Boule

On considére les événements suivants :

N « On obtient une Boule noire »

B « On obtient une Boule blanche »

U « La Boule porte le numéro 1 »

D « La Boule porte le numéro 2 »

1) Donner la probabilité des événements suivants :

B ; N ; U ; D ; $B\cap U$; $N\cap D$

2) a) sachant que La Boule tirée est blanche quelle est la probabilité pour qu'elle porte le numéro 1 on la note : $P_B(U)$

b)comparer : $P_B(U)$ et $\frac{P(B\cap U)}{P(B)}$

3) a) sachant que La Boule tirée est noire quelle est la probabilité pour qu'elle porte le numéro 2 on la note : $P_N(D)$

b)comparer : $P_N(D)$ et $\frac{P(D\cap N)}{P(N)}$

4) a) sachant que La Boule tirée porte le numéro 1 quelle est la probabilité pour qu'elle soit blanche on la note : $P_U(B)$

b)comparer : $P_U(B)$ et $\frac{P(U\cap B)}{P(U)}$

Solution :1) $card(\Omega)=12$; $P(D)=\frac{7}{12}$; $P(U)=\frac{5}{12}$

$P(B)=\frac{5}{12}$; $P(N)=\frac{7}{12}$; $P(B\cap U)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$P(N\cap D)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

2) a) $P_B(U)=\frac{2}{5}$ 2) b) $\frac{P(B\cap U)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}}=\frac{2}{5}=P_B(U)$

3) a) $P_N(D)=\frac{4}{7}$ 3) b) $\frac{P(D\cap N)}{P(N)}=\frac{\frac{4}{12}}{\frac{7}{12}}=\frac{4}{7}=P_N(D)$

4) a) $P_U(B)=\frac{2}{5}$ 4) b) $\frac{P(U\cap B)}{P(U)}=\frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}}=\frac{4}{7}=P_U(B)$

Remarque : $\frac{P(D\cap N)}{P(N)}=P_N(D)\Leftrightarrow P(N\cap D)=P(N)P_N(D)$

Exercice15 : Une urne contient 9 boules dont 5 noires numérotés : 1 ;1 ;1 ;2 ;2 et 4 boules blanches numérotés 1 ;1 ;2 ;2

Sachant que La Boule tirée porte le numéro1 quelle est la probabilité pour qu'elle soit noire **Solution :** on la note : $P_U(N)$

on a : $P_U(N)=\frac{P(U\cap N)}{P(N)}$

$P(U\cap N)=\frac{3}{9}$ et $P(N)=\frac{5}{9}$ donc $P_U(N)=\frac{3}{5}$

Exercice16: on dispose de deux urnes U_1 et U_2

L'urne U_1 contient 2 boules rouges et 3 boules vertes et L'urne U_2 contient 2 boules rouge et 2 boules vertes .

On choisit au Hazard une urne et on tire une boule

On considére les événements suivants :

A_1 : « le choix de L'urne U_1 »

A_2 : « le choix de L'urne U_2 »

V : « tirer une boule verte »

calculer les probabilités des événements suivants $V \cap A_1$ et $V \cap A_1$

Solution : $P(V \cap A_1) = P(A_1) \times P_{A_1}(V) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

$P(V \cap A_2) = P(A_2) \times P_{A_2}(V) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

Exercice17: une urne contient 25 boules dont 15 boules blanches et 10 boules noires.

On tire au Hazard une boule de l'urne puit on tire une autre boule sans remettre la première

1) Sachant que La première Boule tirée est blanche quelle est la probabilité pour que la deuxieme soit blanche aussi

2) Sachant que La première Boule tirée est noire quelle est la probabilité pour que la deuxieme soit noire aussi

3) quelle est la probabilité des événements suivants

E « On obtient deux Boules blanches »

F « On obtient deux Boules noires »

G « On obtient deux Boules de couleurs différentes »

Solution : On considére les événements suivants :

B_1 : « La première Boule tirée est blanche »

B_2 : « La deuxieme Boule tirée est blanche »

N_1 : « La première Boule tirée est noire»

N_2 : « La deuxieme Boule tirée est noire»

1) $P_{B_1}(B_2) = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$ 2) $P_{N_1}(N_2) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

3) $E = B_1 \cap B_2$ $P(B_1 \cap B_2) = ?$

$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{15}{25} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{20}$

$F = N_1 \cap N_2$ $P(N_1 \cap N_2) = ?$

$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = \frac{10}{25} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$

$G = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$

$p(G) = p(B_1 \cap N_2) + p(N_1 \cap B_2)$

$p(G) = p(B_1) \times p_{B_1}(N_2) + p(N_1) \times p_{N_1}(B_2)$

$p(G) = \frac{3}{5} \times \frac{10}{24} + \frac{2}{5} \times \frac{15}{24} = \frac{1}{2}$

Exercice18: on dispose de deux urnes U_1 et U_2

L'urne U_1 contient 2 boules rouges et 3 boules noires et L'urne U_2 contient 3 boules rouge et 4boules noires.

On choisit au Hazard une urne et on tire une boule

On considére les événements suivants :

A_1 : « le choix de L'urne U_1 »

A_2 : « le choix de L'urne U_2 »

R : « tirer une boule rouge »

Calculer la probabilité de tirer une boule rouge

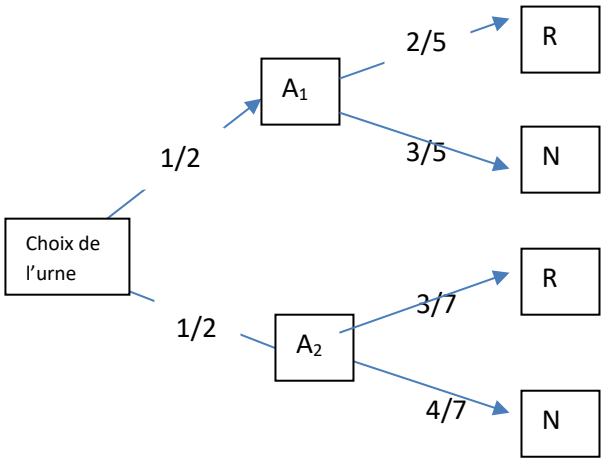
Solution : calculons $P(R)$?

A_1 et A_2 forment une partition de de Ω

D'après la loi de probabilités totales on a :

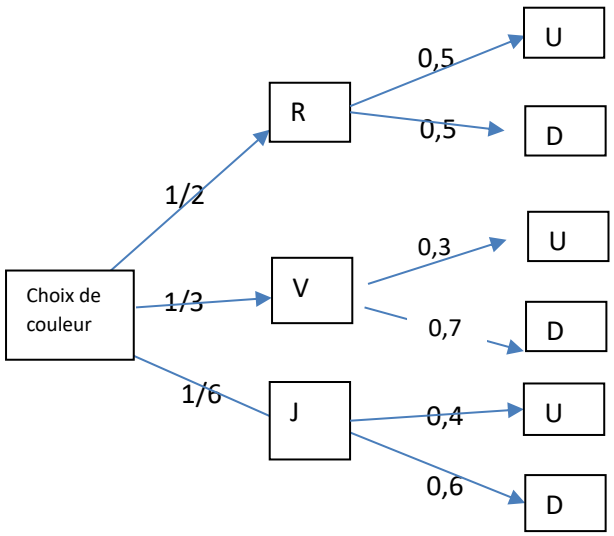
$P(R) = P(A_1) \times P_{A_1}(R) + P(A_2) \times P_{A_2}(R)$

$P(R) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{29}{70}$



Exercice19: une urne contient des jetons de trois couleurs : 50% de jetons sont rouges et $\frac{1}{3}$ de jetons sont vertes et $\frac{1}{6}$ de jetons sont jaunes .
50% de jetons rouges portent le numéros 1 et
30% de jetons vertes portent le numéros 1 et
40% de jetons jaunes portent le numéros 1 et les autres jetons portent le numéros 2
1)Calculer la probabilité de tirer un jeton qui porte le numéros 1
2)Calculer la probabilité de tirer un jeton rouge sachant qu'elle porte le numéros 1

Solution ::
On tire un jeton de l'urne au Hazard
On considére les événements suivants :
R : « le jeton est rouge »
V : « le jeton est vert »
J : « le jeton est jaune »
U : « le jeton porte le numéros 1 »
D : « le jeton porte le numéros 2 »
on utilise une Arbre pondéré

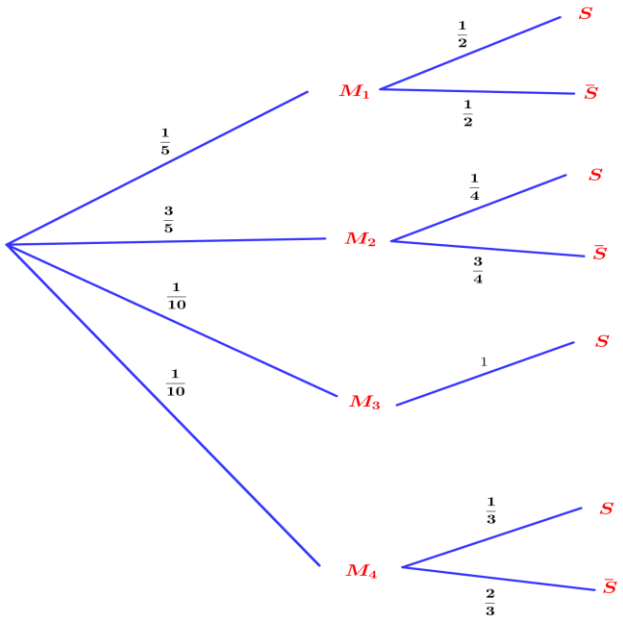


1) Les événements : R et V et J forment une partition de l'univers Ω
D'après la loi de probabilités totales on a :
$$P(U)=P(R)\times P_R(U)+P(V)\times P_V(U)+P(J)\times P_J(U)$$
Puisque on a : $P(R)=\frac{1}{2}$ et $P(V)=\frac{1}{3}$ et $P(J)=\frac{1}{6}$
et $P_R(U)=50\%=0,5$ et $P_V(U)=30\%=0,3$ et
$P_J(U)=40\%=0,4$
alors : $P(U)=\frac{0,5}{2}+\frac{0,3}{3}+\frac{0,4}{6}=\frac{5}{12}$

2)Calculons la probabilité de tirer un jeton rouge sachant qu'elle porte le numéros 1
On va calculer : $P_U(R)=?$
$$P_U(R)=\frac{P(R\cap U)}{P(U)}$$
Or : $P(R\cap U)=P(R)\times P_R(U)=\frac{1}{2}\times 0.5=\frac{1}{4}$
Donc : $P_U(R)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}=\frac{3}{5}$

Exercice20: Dans un lycée il y a 4 classes de terminale ES avec 4 professeurs :
$M1$, $M2$, $M3$, $M4$.
Lors des devoirs communs les élèves constatent que la probabilité qu'un sujet sur les suites « Tombe » dépend du professeur rédacteur du devoir et Ils savent que :
- $M1$ rédige le devoir 1 fois sur 5 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 2
- $M2$ rédige le devoir 3 fois sur 5 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 4
- $M3$ rédige le devoir 1 fois sur 10 et qu'alors le sujet sur les suites est toujours présent
- $M4$ rédige le devoir 1 fois sur 10 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 3

On appelle : Mi l'événement « le rédacteur du sujet est le professeur Mi »
S l'événement « le sujet sur les suites est présent dans le devoir »
Calculer la probabilité de S
Solution : Arbre pondéré :



D'après la loi des probabilités totales on a :

$$p(S)=p(M_1)P_{M_1}(S)+p(M_2)P_{M_2}(S)+$$
$$+p(M_3)P_{M_3}(S)+p(M_4)P_{M_4}(S)$$

$$p(S)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{10}\times 1+\frac{1}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{23}{60}$$

Exercice21: On considére des sacs de billes S_1, S_2, S_3, ...tels que S_1 contient 3 billes jaunes et 2 billes vertes.

Chacun des sacs suivants S_2, S_3, ... contient 2 billes jaunes et 2 billes vertes.

On tire au hasard une bille de S_1 et on la met dans S_2.

Puis on tire une bille de S_2 et on la met dans S_3.

Et ainsi de suite.

Pour tout entier n ≥ 1, on note E_n l'´évènement « la bille tirée dans S_n est verte » et $P(E_n)$ sa probabilité.

1) déterminer $P(E_1)$, $P_{E_1}(E_2)$, $P_{\overline{E_1}}(E_2)$ et $P(E_2)$

2) A l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $P(E_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$

3) Soit (u_n) la suite définie par u_1 = 0,4 et pour tout entier n ≥ 1, u_{n+1} = 0,2 u_n + 0,4.

a) démontrer que la suite (u_n) est majorée par 0,5.

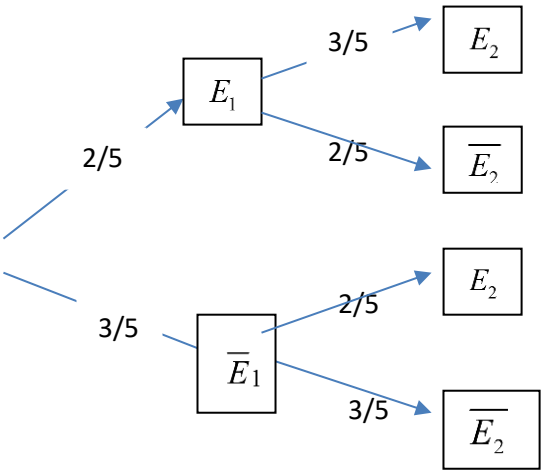
b) démontrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite

Solution :1) On est dans une situation d'équiprobabilité donc : $P(E_1)=\frac{2}{5}$

$P_{E_1}(E_2)=\frac{3}{5}$ (Sachant E_1)

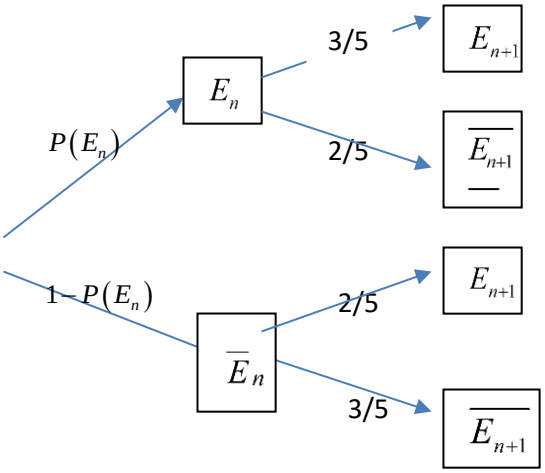
$P_{\overline{E_1}}(E_2)=\frac{2}{5}$ (Sachant $\overline{E_1}$)



D'après la loi des probabilités totales on a :

$$P(E_2)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$$

2)



D'après la loi des probabilités totales on a :

$$P(E_{n+1})=P(E_n)\times\frac{3}{5}+(1-P(E_n))\times\frac{2}{5}$$

$$P(E_{n+1})=\frac{3}{5}P(E_n)+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}P(E_n)$$

$$P(E_{n+1})=\frac{1}{5}P(E_n)+\frac{2}{5}$$

$$P(E_{n+1})=0,2P(E_n)+0,4 \quad n \geq 1$$

3) a) démontrons que $u_n \leq 0,5 \quad \forall n \geq 1$

On a u_1 = 0,4 $\leq 0,5$ donc vraie pour n=1

Supposons que : $u_n \leq 0,5$

Montrons que : $u_{n+1} \leq 0,5$?

On a : $0,2u_n \leq 0,1$ donc : $0,2u_n+0,4 \leq 0,5$

Donc : $\forall n \geq 1\ u_n \leq 0,5$

3) b) Montrons que la suite (u_n) est croissante

$$u_{n+1}-u_n=0,2u_n+0,4-u_n=-0,8u_n+0,4$$

Or $u_n \leq 0,5$ donc $-0,8u_n \geq -0,8\times 0,5$

donc $-0,8u_n \geq -0,4$ donc $-0,8u_n + 0,4 \geq 0$

donc : la suite (u_n) est croissante

3)c) la suite (u_n) est croissante et puisqu'elle est majorée alors elle est convergente

Sa limite l vérifie : l = 0,2l + 0,4.

Donc : $l = 0,5$

Exercice22: On lance une fois un dé cubique équilibré.

On considére les événements suivants :

A : « on obtient un nombre pair »

B : « on obtient un multiple de 3 »

1) calculer les probabilités

des événements suivants : A ; B ; $A\cap B$; $P_B(A)$

2)comparer : $p(A\cap B)$ et $p(A)\times p(B)$

Solution :1) $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ et $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$A\cap B$"obtenir un nombre pair et un multiple de 3 »

Donc : $A\cap B=\{6\}$ donc : $p(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}}=\frac{1}{2}$$

2) $p(A)\times p(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=p(A\cap B)$

On dira que les événements A et B sont indépendants

Exercice23: on écrit les entiers de 1 a 20 sur vingt cartons

On tire au Hazard un carton

Soient les événements suivants :

A : « on obtient un nombre impair »

B : « obtenir un multiple de 5 »

1)Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Et événements A et B sont-ils incompatibles ?

2)même question mais cette fois-ci on rajoute un carton numéroté 21

Solution :1) l'univers des éventualités est :

Ω = {1 ; 2 ; 3 ;…; 20}.

A = {1 ; 3 ; 7 ;…; 19}. B = {5 ;10 ; 15; 20 }.

$A\cap B$= {5 ; 15}.

On est dans une situation d'équiprobabilité donc :

$P(A)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$ et $P(B)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

$p(A\cap B)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

$p(A)\times p(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}=p(A\cap B)$

Donc les événements A et B sont indépendants

$A\cap B$= {5 ; 15}. $\neq\varnothing$

Donc les événements A et B sont compatibles

2) Ω = {1 ; 2 ; 3 ;…; 20; 21}.

A = {1 ; 3 ; 7 ;…; 19; 21}. B = {5 ;10 ; 15; 20 }.

$A\cap B$= {5 ; 15}$\neq\varnothing$ Donc les événements A et B sont compatibles

$P(A)=\frac{11}{21}$ et $P(B)=\frac{4}{21}$ et on a ; $p(A\cap B)=\frac{2}{21}$

$p(A)\times p(B)\neq p(A\cap B)$

Donc les événements A et B sont dépendants

Exercice24: On lance deux fois de suite un dé cubique équilibré.

Soient les événements suivants :

A : « on obtient le numéro 6 au 1ere lancement »

B : « on obtient le numéro 6 au 2ere lancement »

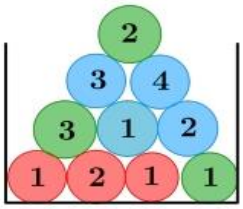
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Solution : sans faire les calculs les 2 événements A et B sont indépendants car le 2ere lancement ne dépend pas du 1ere lancement en effet : $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ et $P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$p(A\cap B)=\frac{1}{36}$ donc : $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

Donc : les 2 événements A et B sont indépendants

Exercice 25: Dans l'urne ci-contre :



Il y a des jetons numérotés de différentes couleurs. On tire au hasard un jeton dans cette urne et on considére les évènements suivants :

B : le jeton tiré est bleu

I : le numéro du jeton tiré est impair

1) Les évènements B et I sont-ils indépendants ?

2) Combien faut-il rajouter de jetons bleus numérotés 1 pour que les évènements B et I

soient indépendants ?

Solution :1) on est dans une situation d'équiprobabilité donc :

$P(I)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ et $P_B(I)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Donc : $P_B(I)\neq P(I)$ donc Les évènements B et I sont dépendants

2)soit n : le nombre de jetons bleus numérotés 1 rajouter

$P(I)=\frac{6+n}{n+10}$ et $P_B(I)=\frac{n+2}{n+4}$

B et I sont indépendants $\Leftrightarrow P_B(I)=P(I)$

$\Leftrightarrow \frac{6+n}{n+10}=\frac{n+2}{n+4}\Leftrightarrow (6+n)(n+4)=(10+n)(n+2)$

$\Leftrightarrow n^2+10n+24=n^2+12n+20$

$\Leftrightarrow 4=2n\Leftrightarrow n=2$

Exercice26: On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant six jetons : trois rouges numérotés 1, 2 et 3, deux jaunes numérotés 1 et 2 , et un bleu numéroté 1.

On désigne respectivement par R, U et D les événements :

« le jeton est rouge », « le numéro est 1 » et « le numéro est 2 ».

Les événements R et U sont-ils indépendants ? Et les événements R et D ?

Exercice27: (notion de variable aléatoire)

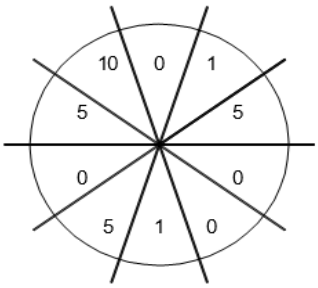
Un jeu consiste à faire tourner une roue bien équilibrée

Le prix à payer pour une partie est de 2 dh

Le jeu rapporte le montant indiqué par la roue en dh on pose :

X = gain = rapport du jeu - prix de la partie

On dit que X est une variable aléatoire



1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X

2) déterminer les probabilités associées respectivement aux valeurs possibles de X (Mettre les résultats dans un tableau)

3) déterminer p (X ≤ 0) et p (X > 0)

4) déterminer $E(X)$ l'espérance de X donnée par : $E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i p(X=x_i)$

où les xi sont les valeurs possibles pour X et pi les probabilités respectivement associées. Interpréter cette valeur.

5) déterminer la variance V (X) et l'écart type σ(X) de X donnés par :

$V(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i p_i^2-(E(X))^2$ et $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

6) le jeu est à gain positif si E(X) > 0, qu'en est-il de ce jeu ? est-il plus favorable à l'organisateur ou au joueur ?

7) déterminer le prix de la partie pour que l'espérance soit nulle.

Solution :1)les valeurs possibles pour X : sont 10-2=8 5-2=3 1-2=-1 0-2=-2

Donc : $X(\Omega)=\{-2;-1,3,8\}$

2) valeurs des probabilités associées aux valeurs de X : p(X = 8) = p(score = 10) = $\frac{1}{10}$

p(X = 3) = p(score = 5) = $\frac{3}{10}$

p(X = -1) = p(score = 1) = $\frac{2}{10}$

p(X = -2) = p(score = 0) = $\frac{4}{10}$

Valeurs possibles de X : $X(\Omega)$	-2	-1	3	8	total
$P(X=x_i)$	*4/10=2/5*	*2/10= 1/5*	*3/10*	*1/10*	*1*

On remarque que :

p(X = 8)+ p(X = 3)+ p(X = -1)+ p(X = -2)=1

3)

p(X ≤ 0) = p(X = −2) + p(X = −1) = $\frac{4}{10}+\frac{2}{10}=\frac{6}{10}=0,6$

p (X > 0) = 1 − p(X ≤ 0) =1-0,6=0.4

4) déterminons : E(X) l'espérance de X

$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i p(X=x_i)$

$E(X)=\left(-2\times\frac{4}{10}\right)+\left(-1\times\frac{2}{10}\right)+\left(3\times\frac{3}{10}\right)+\left(8\times\frac{1}{10}\right)=0,7$

Ceci signifie qu'en moyenne le gain est de 0,7 DH par partie

5) déterminons : la variance $V(X)$ et et l'écart type $\sigma(X)$?

$V(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i(p(X=x_i))^2-(E(X))^2=\sum_{i=1}^{4}x_i p_i^2-(E(X))^2$

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ = $(-2)^2\times 0,4+$

$(-1)^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,3 + 8^2 \times 0,1 - 0,7^2$

$V(X) = 10,41$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{10,4} \approx 3,22$

le jeu est à gain positif car E(X) = 0, 7 > 0,

il est plus favorable au joueur car il gagne

en moyenne 0,7 DH.

7. soit y le prix de la partie pour que l'espérance soit nulle.

E(X) = 0 $\Leftrightarrow$

0, 4(0 − y) + 0, 2(1 − y) + 0, 3(5 − y) + 0, 1(10 − y) = 0

$\Leftrightarrow$ −0, 4y+0, 2 − 0, 2y +1, 5−0, 3y + 1− 0, 1y = 0

$\Leftrightarrow$ −y + 2, 7 = 0

$\Leftrightarrow$ y = 2, 7

e prix doit être de 2,7 DH pour avoir une espérance nulle

Exercice28: Une urne contient 6 boules qui portent les numéros :**2 ,2, 2, ,1 ,1 , 0** indiscernables au toucher

On tire de l'urne au hasard deux Boules simultanément

Soit Y la variable aléatoire qui associe à chaque tirage La somme des numéros des deux boules tirées.

1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour Y

x_i	1	2	3	4
$p(Y = x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$

2) déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire Y

3) calculer : $E(Y)$ l'espérance de Y et la variance V (Y) et l'écart type σ(Y)

Solution :1) les valeurs possibles pour X sont :

On peut par exemple tirer deux boules qui portent le numeros1 donc : la somme =2

On peut par exemple tirer deux boules qui portent le numeros2 donc : la somme =4

On peut par exemple tirer deux boules dont une porte le numéro 0 et une autre 1 donc : la somme =1

On peut aussi tirer une boule qui porte le numéro 1 et une autre qui porte le numéro 2donc : la somme =3

$1+0=1$ ou $2+0=2$ ou $1+1=2$ ou $1+2=3$ ou $2+2=4$ Donc : $Y(\Omega) = \{1;2;3;4\}$

2) déterminons la loi de probabilités de la variable aléatoire Y(tableau)

L'évènement : $(Y=1)$ se traduit par :

$(Y=1)$" la somme des numéros des deux boules tirées est égal à 1"

$(Y=1)$" tirer une boules qui portent le numéro 0 et une boules qui portent le numéro 1"

$$p(Y=1) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}$$

$(Y=2)$" tirer une boules qui portent 2 et une boules qui portent le numéro 0 ou tirer deux boules qui portent 1 "

$$p(Y=2) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_2^2}{C_6^2}$$

$(Y=3)$" tirer une boules qui portent 1 et une boules qui portent le numéro 2 "

$$p(Y=3) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{3}{5}$$

$(Y=4)$" tirer deux boules qui portent 2 "

$$p(Y=4) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

On résume tous dans un tableau :

On remarque que : $\frac{2}{15} + \frac{4}{15} + \frac{6}{15} + \frac{3}{15} = \frac{15}{15} = 1$

3) $E(Y)$? et V (Y) ? et l'écart type σ(Y) ?

$$E(Y) = \left(1 \times \frac{2}{15}\right) + \left(2 \times \frac{4}{15}\right) + \left(3 \times \frac{6}{15}\right) + \left(4 \times \frac{3}{15}\right) = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

$$V(X) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \left(1^2 \times \frac{2}{15}\right) + \left(2^2 \times \frac{4}{15}\right) + \left(3^2 \times \frac{6}{15}\right) + \left(4^2 \times \frac{3}{15}\right) - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}$$

$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Exercice29 : Soit X la variable aléatoire définie par la loi de probabilités suivante :

x_i	-1	0	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{6}$

1)calculer la probabilité de l'évènement $(X=2)$

2) calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$

Exercice30 : Une urne contient 6 boules qui portent les numéros :**-1 ;-1 ;0 ;1 ;1 ;2** indiscernables au toucher

On tire de l'urne au hasard deux Boules simultanément

Soit Z la variable aléatoire qui associe à chaque tirage La somme des numéros des deux boules tirées.

1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour Z

2) déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire Z

3) calculer : $E(Z)$ l'espérance de Z et la variance V (Z) et l'écart type σ(Z)

Solution :1) $(-1)+(1)=(0)$ ou $(-1)+(-1)=(-2)$

$(-1)+(0)=(-1)$ ou $(2)+(-1)=(1)$ ou

$(1)+(0)=(1)$

ou $(2)+(0)=(2)$ ou $(2)+(1)=(3)$

les valeurs possibles pour Z sont :

$Z(\Omega)=\{-2;-1;0;1;2;3\}$

2) déterminons la loi de probabilités de la variable aléatoire Z(tableau)

L'évènement : $(Z=-2)$ se traduit par :

$(Z=-2)$" le somme des numéros des deux boules tirées est égal à -2"

$(Z=-2)$" tirer deux boules qui portent -1 "

$$p(Z=-2)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}$$

$(Z=-1)$" tirer une boules qui portent -1 et une boules qui portent le numéro 0 "

$$p(Z=-1)=\frac{C_3^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}$$

$(Z=0)$" tirer une boules qui portent -1 et une boules qui portent le numéro 1 "

$$p(Z=0)=\frac{C_1^1\times C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}$$

$(Z=1)$" tirer une boules qui portent -1 et une boules qui portent le numéro 2 ou tirer une boules qui portent 0 et une boules qui portent le 1 "

$$p(Z=1)=\frac{C_1^1\times C_3^1+C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{4}{15}$$

$(Z=2)$" tirer une boules qui portent 2 et une boules qui portent le numéro 0 "

$$p(Z=2)=\frac{C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{1}{15}$$

$(Z=3)$" tirer une boules qui portent 2 et une boules qui portent le numéro 1"

$$p(Z=3)=\frac{C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{1}{15}$$

On résume tous dans un tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(Z=x_i)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

3) $E(Z)$? et V (Z) ? et l'écart type σ(Z) ?

$$E(Z)=\left(-2\times\frac{3}{15}\right)+\left(-1\times\frac{3}{15}\right)+\left(0\times\frac{3}{15}\right)+\left(1\times\frac{4}{15}\right)+\left(2\times\frac{1}{15}\right)+\left(3\times\frac{1}{15}\right)$$

$$E(Z)=\left(-\frac{6}{15}\right)+\left(-\frac{3}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{2}{15}\right)+\left(\frac{3}{15}\right)=0$$

$$V(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2$$

$$V(Z)=\left((-2)^2\times\frac{3}{15}\right)+\left((-1)^2\times\frac{3}{15}\right)+\left((0)^2\times\frac{3}{15}\right)+\left((1)^2\times\frac{4}{15}\right)+\left((2)^2\times\frac{1}{15}\right)+\left((3)^2\times\frac{1}{15}\right)-(0)^2$$

$$V(Z)=\left(\frac{12}{15}\right)+\left(\frac{3}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{9}{15}\right)=\frac{32}{15}$$

$$\sigma(Z)=\sqrt{V(Z)}=\sqrt{\frac{32}{15}}$$

Exercice31 : Une urne contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. Indiscernables au toucher

On tire de l'urne au hasard trois Boules successivement et sans remise

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage <u>le nombre</u> de jetons qui portent un chiffre impair

1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X
2) déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire X(tableau)
3) calculer : $E(X)$ l'espérance de X et la variance V (X) et l'écart type σ(X)

Solution :1) On peut par exemple ne tirer aucun chiffre impair(X=0) ou tirer un chiffre impair(X=1) ou tirer deux chiffre impair(X=2) ou tirer 3 chiffre impair(X=3) donc : l'ensemble des valeurs possibles pour X est : $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

2) déterminons la loi de probabilités de la variable aléatoire X (tableau)

L'évènement : $(X=0)$ se traduit par :

$(X=0)$" obtenir trois jetons pairs"

$$p(X=0)=\frac{A_4^3}{A_9^3}=\frac{2}{42}=\frac{1}{21}$$

$(X=1)$" obtenir un jeton impair"

$$p(X=1)=\frac{C_3^1\times A_4^2\times A_5^1}{A_9^3}=\frac{15}{42}$$

$(X=2)$" obtenir deux jetons impairs"

$$p(X=2)=\frac{C_3^2\times A_4^1\times A_5^2}{A_9^3}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$$

$(X=3)$" obtenir 3 jetons impairs"

$$p(X=3)=\frac{A_5^3}{A_9^3}=\frac{5}{42}$$

On résume tous dans un tableau :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{5}{42}$

3) $E(X)$? et V (X) ? et l'écart type σ(X) ?

$$E(X)=\left(0\times\frac{2}{42}\right)+\left(1\times\frac{15}{42}\right)+\left(2\times\frac{20}{42}\right)+\left(3\times\frac{5}{42}\right)=\frac{5}{3}$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$V(X)=\left((0)^2\times\frac{2}{42}\right)+\left((1)^2\times\frac{15}{42}\right)+\left((2)^2\times\frac{20}{42}\right)+\left((3)^2\times\frac{5}{42}\right)-\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$V(X)=\frac{10}{3}-\frac{25}{9}=\frac{5}{9}$$

$$\sigma(Z)=\sqrt{V(Z)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Exercice32: Une urne contient 8 boules : 3 boules qui portent le numeros1 et une boule Qui porte le numéro 0 et le reste portent le numéro 2 et toutes les Boules sont indiscernables On tire de l'urne au hasard deux Boules simultanément

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le produit des numéros des deux boules tirées.

1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X
2) déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire X(tableau)
3) calculer : $E(X)$ l'espérance de X et la variance V (X) et l'écart type σ(X)
4) déterminer la fonction F_X de répartition de la variable X et représenter graphiquement F_X

Solution :1) les valeurs possibles pour X sont :

On peut par exemple tirer deux boules qui portent le numeros1 donc : le produit =1

On peut par exemple tirer deux boules qui portent le numeros2 donc : le produit =4

On peut par exemple tirer deux boules dont une porte le numéro 0 donc : le produit =0

On peut aussi tirer une boule qui porte le numéro 1 et une autre qui porte le numéro 2donc : le produit =2

$1\times1=1$ ou $2\times2=4$ ou $0\times0=0$ ou $0\times1=0$ ou $0\times2=0$ ou $2\times1=2$

Donc : $X(\Omega)=\{0;1,2,4\}$

2) déterminons la loi de probabilités de la variable aléatoire X(tableau)

L'évènement : $(X=0)$ se traduit par :

$(X=0)$" le produit des numéros des deux boules tirées est égal à 0"

$$P(X=0)=\frac{C_1^1\times C_7^1}{C_8^2}=\frac{1\times7}{28}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$$

$(X=1)$" le produit des numéros des deux boules tirées est égal à 1"

(On tire deux boules qui portent le numéro 1)

$$P(X=1)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$$

$(X=2)$" le produit des numéros des deux boules tirées est égal à 2"

$(X=2)$" On tire une boules qui portent le numéro 1 et une boules qui portent le numéro 2"

$$P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_4^1}{C_8^2}=\frac{3\times 4}{28}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$$

$(X=4)$" On tire deux boules qui portent le numéro 2"

$$P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$$

On résume tous dans un tableau :

$X(\Omega)$	0	1	2	4
$P(X=x_i)$	*7/28=1/4*	*3/28*	*12/28=3/7*	*6/28=3/14*

On remarque que :

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=4)=1$$

3) $E(X)$?

$$E(X)=0\times p(X=0)+1\times p(X=1)+2\times p(X=2)+4\times p(X=4)$$

$$E(X)=\left(0\times\frac{7}{28}\right)+\left(1\times\frac{3}{28}\right)+\left(2\times\frac{12}{28}\right)+\left(4\times\frac{6}{28}\right)=\frac{3+24+24}{28}=\frac{51}{28}$$

Calcul de $V(X)$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$=\left(0^2\times\frac{7}{28}\right)+\left(1^2\times\frac{3}{28}\right)+\left(2^2\times\frac{12}{28}\right)+\left(4^2\times\frac{6}{28}\right)-\left(\frac{51}{28}\right)^2$$

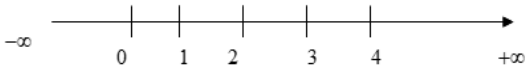
$$=\frac{3}{28}+\frac{48}{28}+\frac{96}{28}-\left(\frac{51}{28}\right)^2=\frac{147}{28}-\left(\frac{51}{28}\right)^2=\frac{4116}{28^2}-\frac{2601}{28^2}$$

$$V(X)=\frac{1515}{784}$$

Calcul de $\sigma(X)$:?

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{1515}{784}}$$

4)



Si $x\le 0$ alors : $F_x(x)=P(X\prec x)=P(\Phi)=0$

Si $0\prec x\le 1$ alors : $F_x(x)=P(X=0)=\frac{1}{4}=\frac{7}{28}$

Si $1\prec x\le 2$ alors :

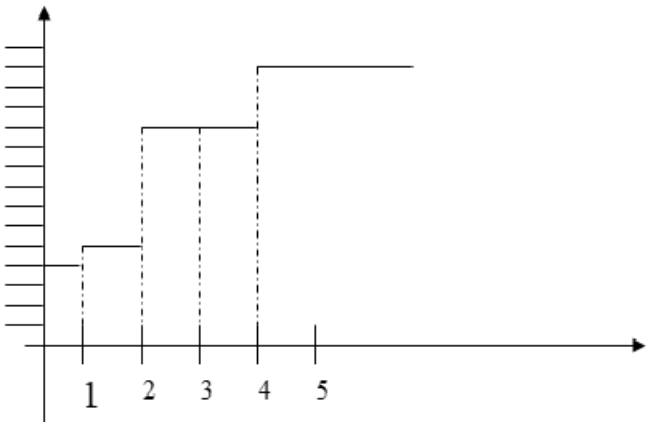
$$F_x(x)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$$

Si $x\in\,]2,4]$ alors :

$$F_x(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$=\frac{10}{28}+\frac{12}{28}=\frac{22}{28}=\frac{11}{14}$$

Si $x\succ 4$ alors : $F_x(x)=\frac{22}{28}+\frac{6}{28}=\frac{28}{28}=1$



Exercice33 :1) on considére l'épreuve suivante :
On lance une fois un dé cubique équilibré.
Et on considére l'événement suivant :
A : « on obtient un diviseur de 3 »

Calcule de la probabilité de l'événement A :

$p(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et $p(\overline{A})=1-p(A)=\frac{2}{3}$

L'événement A peut se réaliser (Succès (S))

Ou ne pas se réaliser (Échec(E)).

2)on répète cette épreuve $n=4$ fois de suite
Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois la réalisation de L'événement A

Pour les 4 épreuves.

la variable aléatoire X s'appelle une lois binomiale de paramètre $n=4$ et $p=\frac{1}{3}$

a)calculer : $p(X=2)$?

b)calculer : $p(X=k)$? $\forall k\in\{0;1;2;3;4\}$

c)déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire X(tableau)

d) calculer : $E(X)$ l'espérance de X et la variance V (X) et l'écart type σ(X) et remarquer que : $E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$

Solution :2)a) L'évènement : $(X=1)$ se traduit par :" L'événement A se réalise exactement 1 fois " on a les cas suivants :

A	$\bar{A}$	$\bar{A}$	$\bar{A}$

Ou

$\bar{A}$	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$

Ou

$\bar{A}$	$\bar{A}$	A	$\bar{A}$

Ou

$\bar{A}$	$\bar{A}$	$\bar{A}$	A

A prend une place parmi 4 place

il y'a donc : C_4^1 possibilités :

donc : $p(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=4\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$

On général on vérifie que :

$p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k\in\{0;1;2;3;4\}$

Loi de probabilités de la variable aléatoire X :

$$p(X=0)=C_4^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=1\times1\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

$$p(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=4\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$$

$$p(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=6\times\frac{1}{9}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$$

$$p(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=4\times\frac{1}{27}\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$$

x_i	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$$p(X=4)=C_4^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=1\times\frac{1}{81}=\frac{1}{81}$$

d) calculer : $E(X)$ l'espérance de X et la variance V (X) et l'écart type σ(X)

un calcul de $E(X)$ donne $\frac{4}{3}$

et on remarque que $E(X)=np=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

un calcul de $V(X)$ donne $\frac{8}{9}$

et on remarque que : $V(X)=np(1-p)=4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$

Exemple34 : Un dé cubique est mal équilibré : la probabilité d'obtenir 6 est de 1/7.

On appelle succès l'événement « obtenir 6 » et échec « obtenir un numéro différent de 6 ».

Cette expérience qui ne comporte que deux issues suit une loi de Bernoulli.

Si On effectue cinq fois cette expérience. On est en présence d'un schéma de Bernoulli.

Exercice35: On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et soit l'évènement :

A "obtenir la face F "

Calculer la probabilité de l'évènement suivant :

B "obtenir face F exactement deux fois"

Solution : $p(A)=\frac{1}{2}$ et $n=3$

$$p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$p(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=3\times\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

Exercice36: On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et soit X le nombre de fois que l'on obtient "pile"

1. faire un arbre illustrant cette situation
2. donner la loi de probabilité de X
3. calculer et interpréter E(X)

Exercice37: On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 € pour chaque résultat « Pile » et on perd 1 € pour chaque résultat « Face ».

1) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le gain correspondant.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Quelle est la probabilité de l'événement : « Obtenir un gain de 3 € » ? On note cette probabilité p(X = 3).

Verifier que la loi de probabilité de X est:

Gain x_i	$x_1=-3$	$x_2=0$	$x_3=3$	$x_4=6$
Probabilité $p_i=p(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

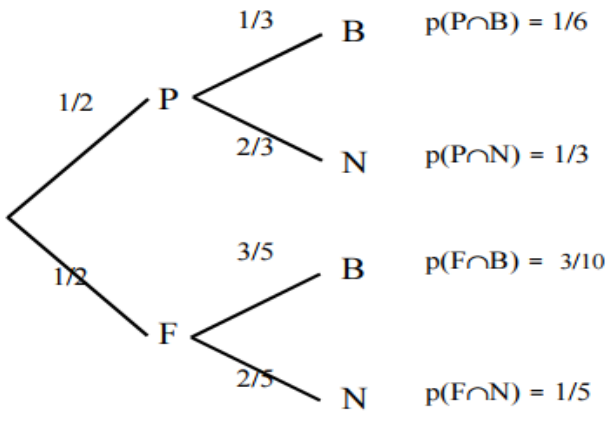
Exercice38: Un joueur lance un dé : si le numéro est un nombre premier, le joueur gagne une somme égale au Nombre considéré (en euros) ; sinon il perd ce même nombre d'euros.

1°) Si X est le gain algébrique réalisé, donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance Mathématique et son écart-type.

2°) Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice39: On jette une pièce.

▪ Si on obtient pile, on tire une boule dans l'urne P contenant 1 boule blanche et 2 boules noires.
▪ Si on obtient face, on tire une boule dans l'urne F contenant 3 boules blanches et 2 boules noires.
On peut représenter cette expérience par l'arbre pondéré ci-dessous :



« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

Bon courage