

Exercice 1

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2 + k^2}$

1) en utilisant le théorème des accroissements finies montrer que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \frac{n}{n^2 + (k+1)^2} \leq \arctan \frac{k+1}{n} - \arctan \frac{k}{n} \leq \frac{n}{n^2 + k^2}$$

2) en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \arctan \frac{n+1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \leq U_n \leq \frac{\pi}{4}$

3) montrer que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

Exercice 2

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_n = -\ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln(n+k)$. on pose $f(x) = \ln x$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln a_k$ avec $a_k = 1 + \frac{k}{n}$

2) a) montrer que $(\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}) \quad \frac{1}{n} f(a_k) \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f(a_{k+1})$

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n - \frac{\ln 2}{n} \leq \int_1^2 f(x) dx \leq U_n$

3) a l'aide d'une intégration par partie montrer que $I = \int_1^2 f(x) dx = 2 \ln 2 - 1$

4) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

5) on pose $W_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)}$. montrer que $\lim_{w \rightarrow +\infty} W_w = \frac{4}{e}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = (x+1)e^{-\frac{x}{2}}$

1) a) étudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$

b) étudier le sens de variation de f et donner son tableau de variation

2) étudier la concavité de (C) puis tracer la courbe

3) montrer que $(\forall x \in [0, +\infty[) \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

4) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α et que $1 < \alpha < 2$

5) on considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq U_n < 2$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

c) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$

Exercice 4

Soit n un entier de \mathbb{N}^* . on considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln x \quad ; \quad x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

- 1) a) montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$
 b) étudier la dérivabilité de f à droite de 0
- 2) a) étudier la branche infinie de (C)
 b) étudier le sens de variation de f et donner son tableau de variation
- 3) tracer la courbe (C)
- 4) a) montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution u_n et $u_n > 1$
 b) étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ et montrer que $(\forall n \geq 3) \quad u_n \leq n$
- 5) déduire que $(\forall n \geq 3) \quad u_n \geq \frac{n}{\ln n}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 6) montrer que $(\forall n \geq 3) \quad u_n \leq \frac{n}{\ln n - \ln(\ln n)}$ puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n \ln n}{n} = 1$

Exercice 5

Partie (1) soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 2(x-1) - \ln x$

- 1) a) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$
 b) calculer $g'(x)$; étudier le sens de variation de g puis dresser le tableau de variation
- 2) a) montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, \frac{1}{2}[$ une seule solution α
 b) en déduire le signe de $g(x)$ (remarquer que $g(1) = 0$)

partie (2) soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x(\ln x)^2}{x-1} & ; \quad x \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

- 1) montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$
- 2) a) étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$ et en $x_1 = 1$
 b) donner l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C) au point $x_1 = 1$
- 3) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; interpréter géométriquement les résultats
- 4) calculer $f'(x)$ et donner le tableau de variation
- 5) on pose $\varphi(x) = f(x) - x + 1$ pour tout x de $]0, +\infty[$
 a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}) \quad \varphi'(x) = -\left(\frac{\ln x}{x-1} - 1\right)^2$ et étudier la position de (C) et (Δ)
 b) montrer que $f(\alpha) = 4\alpha^2 - 4\alpha$ et tracer (C) (on donne $\alpha \approx 0,2$)