

EXERCICE 1

Partie (1) soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$

2) a) montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$: $g'(x) = -\frac{1+2x^2}{x}$

b) étudier le sens de variation de g et donner le tableau de variations

3) a) montrer que 1 est l'unique solution de $g(x) = 0$

b) déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$

partie (2) on considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = -x + 2 + \frac{\ln x}{x}$

1) calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ interpréter les résultats

2) a) montrer que (C_f) admet en $+\infty$ une asymptote (Δ) dont précisera l'équation

b) étudier la position de (C_f) et (Δ)

3) a) montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) déduire les variations de f puis dresser le tableau de variations

4) montrer que $f(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ deux solutions α et β telles que $0 < \alpha < 1 < \beta$

5) tracer (C_f) (on donne $0,4 < \alpha < 0,5$; $2,3 < \beta < 2,4$)

Partie (3) h est la fonction définie par : $h(x) = 1 + \sqrt{1 + \ln x}$

1) a) déterminer le domaine de h

b) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$

2) montrer que $h'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}$ et étudier les variations de h

3) montrer que $h([1, e]) \subseteq [1, e]$

4) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = h(U_n)$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq U_n \leq e$

b) montrer par récurrence que $(U_n)_n$ est croissante

c) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \beta$

EXERCICE 2

1) en utilisant le théorème des accroissements finis montrer que

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \ln(1+x) \leq x \leq (x+1)\ln(1+x)$$

2) a) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e^n \leq \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$

b) en déduire que $(\forall n \geq 2) \quad \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sqrt[n]{n+1}$

c) montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$

EXERCICE 3

Soit g l'application définie de $\mathbb{C} - \{1-i\}$ vers $\mathbb{C} - \{1-i\}$ par :

$$(\forall Z \in \mathbb{C} - \{1-i\}) \quad g(Z) = \frac{(1-i)Z}{Z-1+i}$$

1) a) déterminer les deux racines carrées du nombre $3-4i$

b) résoudre dans $\mathbb{C} - \{1-i\}$ l'équation $g(Z) = Z+2+i$

2) a) montrer que $(\forall Z \in \mathbb{C} - \{1-i\}) \quad (\overline{g(Z)} = g(Z)) \Leftrightarrow (|Z+i|=1)$

b) en déduire l'ensemble des points $M(Z)$ tel que $g(Z)$ réel

3) soit Z un nombre de $\mathbb{C} - \{1-i\}$ et on pose $Z-1+i = e^{i\theta}$ où $\theta \in [0, \pi[$

a) déterminer en fonction de θ $\arg(g(Z) - 1 + i)$ et $|g(Z) - 1 + i|$

b) sachant que $g(Z) - 1 + i = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

déterminer l'écriture exponentielle du nombre $Z - 1 + i$ déduire Z

EXERCICE 4

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$

1) Montrer que $(\forall x \in [0, +\infty[) F'(x) = \arctan x$

2) on considère les suites $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ telles que :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n} \arctan\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{k=n} \arctan^2\left(\frac{k}{n}\right)$$

a) montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

b) en appliquant le théorème des accroissements finis à F sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$

montrer que : $u_n - \frac{\pi}{4n} \leq \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \leq u_n$

c) en déduire la limite de $(u_n)_{n>0}$

2) soit la suite $(S_n)_{n>0}$ définie par : $S_n = \prod_{k=0}^{k=n} \left(1 + \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

a) montrer que $(\forall x \geq 0) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n - \frac{1}{2}v_n \leq \ln S_n \leq u_n$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

FIN

الله ولي التوفيق