

**EXERCICE 1**

**Partie (1)** Soit  $(V_n)_{n>0}$  la suite telle que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) V_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$

1) montrer que  $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \frac{1}{k+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

ن 0.5

2) en déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) V_n \leq 1 + \ln(n)$

ن 0.5

**Partie (2)** On considère la suite  $(U_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $U_0 = 1$  و  $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n}$

1) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n > 0$  en déduire la monotonie de  $(U_n)_{n \geq 0}$

2) a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1}^2 - U_n^2 = 2 + \frac{1}{U_n^2}$

ن 1  
ن 0.5

b) en déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{U_k^2}$

ن 0.5

3) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n^2 \geq 2n + 2$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

ن 0.5

4) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n^2 \leq 2n + 1 + \frac{1}{2} V_n$  en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{\sqrt{2n}}$

ن 1

**EXERCICE 2**

Soit  $m$  un complexe . on considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

(E)  $Z^2 - (1 - im)Z + 2m^2 - 2im = 0$  on note  $Z_1 ; Z_2$  les solutions de (E)

1) Déterminer  $m$  pour que  $Z_1 \times Z_2 = 1$

2) Déterminer  $m$  pour que  $Z_1 = 1 + i$  soit solution de (E) puis déterminer la deuxième solution (on donne  $8 - 6i = (3 - i)^2$ )

ن 1  
ن 1

3) Vérifier que le discriminant de (E) s'écrit  $\Delta = (1 + 3im)^2$

ن 1

Puis déterminer les solutions  $Z_1$  et  $Z_2$

**EXERCICE 3**

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  .

On considère l'application  $F$  qui à tout point  $M(Z \neq i)$  fait associer le point  $M'(Z')$

ن 0.5

tel que  $Z' = \frac{i(Z - 2i)}{Z - i}$  .  $A(2i) ; B(i)$  deux points de (P)

ن 0.5

1) résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z' = Z$

- 2) a) sachant que  $Z - i = e^{i\alpha}$  ;  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  déterminer  $\|Z'\|$  et  $\arg(Z')$
- b) montrer que  $(\forall Z \in \mathbb{C} - \{i, 2i\}) \quad \arg(Z') \equiv \frac{\pi}{2} + \overline{(\overline{BM}, \overline{AM})} \quad [2\pi]$
- c) en déduire l'ensemble des points  $M(Z)$  pour que  $Z'$  soit imaginaire
- 3) a) montrer que  $(\forall Z \in \mathbb{C} - \{i\}) \quad (Z' - i)(Z - i) = 1$
- b) déduire l'image du cercle  $U$  de centre  $B$  et de rayon  $R=1$
- 4) on considère les points  $D$ ,  $C$  d'affixes  $d = -1 + i$  ;  $c = 1 + i$
- (i) montrer que  $(\forall Z \in \{i, c, d\}) \quad \frac{Z' - c}{Z' - d} = -\frac{Z - c}{Z - d}$
- En déduire que  $\overline{(\overline{M'D}, \overline{M'C})} \equiv \pi + \overline{(\overline{MD}, \overline{MC})} \quad [2\pi]$
- (ii) on suppose que  $D$ ,  $C$ ,  $M$  non alignés
- montrer que  $D$ ,  $C$ ,  $M$ ,  $M'$  sont cocyclique

#### EXERCICE 4

- (I) On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = 2x + \ln x$
- 1) a) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$
- b) étudier les branches infinies de  $(C_f)$  en  $+\infty$
- 2) calculer  $f'(x)$  et étudier les variations de  $f$  puis dresser le tableau de variations
- 3) a) montrer que  $f(x) = x$  admet une solution  $\alpha$  et  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$
- b) tracer la courbe  $(C_f)$  (on prend  $\alpha \approx 0,57$ )
- (II) Soient  $(U_n)_n$  ;  $(V_n)_n$  deux suites définies par :
- $U_0 = e$  ;  $U_{n+1} = f(U_n)$  et  $V_0 = 1$  ;  $V_{n+1} = 2V_n + 1$
- 1) a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq e$
- b) vérifier que  $V_{n+1} + 1 = 2(V_n + 1)$  puis déduire  $V_n$  en fonction de  $n$
- 2) a) montrer que  $(\forall x \geq e) \quad f(x) \geq 2x + 1$
- b) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq V_n$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- (III) On pose  $h(x) = e^{-x}$ . Soit  $(W_n)_n$  la suite telle que :  $W_0 \in \left] \frac{1}{e}, 1 \right[$  ;  $W_{n+1} = h(W_n)$
- 1) a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{e} < W_n < 1$

b) vérifier que  $h(\alpha) = \alpha$

2) montrer que  $\left(\forall x \in \left] \frac{1}{e}, 1 \right[ \right) |h'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

3) a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) |W_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{e}} |W_n - \alpha|$

b) montrer que  $(W_n)_n$  est convergente et déterminer sa limite

0.5

### EXERCICE 5

Soit  $n$  un entier tel que  $n \geq 3$ .

0.5

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = nxe^{-2x} - \frac{1}{2}$

0.5

1) a) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$

0.5

0.5

b) étudier la branche infinie de  $(C_n)$  en  $-\infty$

1

2) a) étudier les variations de  $f_n$  et donner le tableau de variations

0.5

b) montrer que  $f_n(x) = 0$  admet deux solutions  $u_n$  et  $v_n$  (on prend  $u_n < v_n$ )

0.5

2) a) étudier la position relative de  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$

1

b) tracer  $(C_3)$  et  $(C_4)$  (on donne  $u_3 \approx 0,3$  ,  $v_3 \approx 0,75$  et  $u_4 \approx 0,2$  ,  $v_4 \approx 1,1$ )

0.5

3) a) montrer que  $(\forall n \geq 3) u_n > 0$

0.5

b) étudier la monotonie de  $(u_n)_n$  en déduire qu'elle est convergente

1

c) montrer que  $(\forall n \geq 3) \frac{1}{2n} \leq u_n \leq \frac{e}{2n}$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

1

d) prouver que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = \frac{1}{2}$

0.5

5) a) montrer que  $(\forall n \geq 4) v_n > 1$  (on donne  $e^2 < 7,4$ )

b) étudier la monotonie de  $(v_n)_n$

c) montrer que  $(\forall n \geq 4) v_n \geq \frac{1}{2} \ln(2n)$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

d) montrer que  $(\forall x > 0) 2 \ln x \leq x$  en déduire que  $(\forall n \geq 4) v_n \leq \ln n$

e) déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n}$  et prouver que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{\ln n} = \frac{1}{2}$

FIN du sujet