Problème

Partie (1)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et on considère la fonction g_n définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g_n(x) = x - n + \frac{n\ln x}{2}$$

1) a) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g_n(x)$

b) étudier les variations de g_n

c) montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution α_n et $1 \le \alpha_n < e^2$

2) a) prouver que $\ln\alpha_n = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$

b) montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est croissante

c) déduire que $(\alpha_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

Partie (2)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

2) montrer que $f'(x) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$ puis donner le tableau de variations de f

3) étudier la branche infinie de (C_f) et tracer la courbe (C_f)

Partie (3)

On considère la suite $(U_n)_n$ telle que : $U_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)$

On pose $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx$ et $J = \int_1^2 f(x)dx$

1) a) en utilisant une intégration par partie calculer I

b) déterminer J

2) a) prouver que $(\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\})$ $\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \le \frac{1}{n}f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$

b) montrer que $U_n - \frac{f(2)}{n} \le J \le U_n - \frac{f(1)}{n}$

c) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite