Problème d'analyse

Partie (1) On considère la fonction f définie sur par : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

(C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) montrer que f est impaire

b) étudier la branche infinie de (C) en $+\infty$

2) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et dresser le tableau de variations de f

3) donner l'équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0 puis tracer (C)

Partie (2) Soit n un entier naturel non nul .

On pose $v_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{n+k}$ et $u_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}f\left(\dfrac{1}{n+k}\right)$

1) montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ln 2$

2) a) montrer que $(\forall h\geq 0)\ 1-h\leq\dfrac{1}{1+h}$ et $(\forall h\geq 0)\ \sqrt{1+h}\leq 1+\dfrac{h}{2}$

b) en déduire que $(\forall t\geq 0)\ 1-\dfrac{t^2}{2}\leq f'(t)\leq 1$

3) a) montrer que $(\forall x\geq 0)\ x-\dfrac{x^3}{6}\leq f(x)\leq x$

b) déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ v_n\left(1-\dfrac{1}{6n^2}\right)\leq u_n\leq v_n$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Partie (3)

1) on pose $U_0=\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ U_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

a) calculer U_0 et montrer que $\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$

(utiliser une intégration par partie)

b) montrer que $(U_n)_n$ es décroissante et convergente

c) montrer que (1) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\leq U_n\leq\dfrac{1}{n+1}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

2) on suppose $n\geq 3$ et on pose $I_n=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$

a) prouver que $(\forall n\geq 3)\ U_n+U_{n-2}=I_n$

Problème d'analyse

b) en utilisant une intégration par partie montrer que $(\forall n \geq 3)\quad nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$

c) prouver que (2) $(\forall n \geq 3)\quad (2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$

3) des relations (1) et (2) déduire la limite $\lim_{n\to+\infty} nU_n$

Partie (4)

Soit F la fonction définie sur par : $F(0) = \ln 2$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2}\,dt$

(Γ) la courbe de F dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

1) montrer que F est paire

2) a) prouver que $(\forall x > 0)\quad -\frac{x^2}{4} + \ln 2 \leq F(x) \leq \ln 2$

b) étudier la continuité et la dérivabilité de F à droite de 0

3) a) montrer que $(\forall x > 0)\quad \frac{f(2x)}{2x} \leq F(x) \leq \frac{f(2x)}{2x}$

b) étudier la branche infinie de (Γ) au voisinage de $+\infty$

4) a) montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(\forall x > 0)\quad F'(x) = \frac{f(2x) - 2f(x)}{2x^2}$

b) montrer que f' est décroissante sur $]0,+\infty[$ puis déduire que $(\forall x > 0)\quad f(2x) < 2f(x)$

c) étudier les variations de F et donner le tableau de variations F

5) tracer la courbe (Γ)

Exercice de complexe

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta)\quad z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2\theta} = 0$ où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

1) déterminer z_2 ; z_1 les solutions de (E_θ) (on prend z_1 tel que $Im(z_1) = \tan\theta$)

2) écrire z_2 ; z_1 sous forme trigonométrique

3) on considère dans le plan complexe (P) les deux points $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$.

Quelle est la nature du triangle OM_1M_2

4) soit n de $\mathbb{N}^*$ déterminer la forme trigonométrique des solutions de $z^{2n} - 2z^n + \frac{1}{\cos^2\theta} = 0$