

**Exercice (1) 3 points**

(I) Soit m un nombre complexe non nul .

on considère dans \mathbb{C} l'équation (I) $(Z+1)^2 + m^2 = 0$

- 1) résoudre l'équation (I)
- 2) déterminer m pour que $e^{i\frac{\pi}{3}}$ soit solution de (I)
- 3) déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que les solutions de (I) aient même module

(II) Le plan complexe est munie d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère les points $M(m)$; $B(b = -1 + im)$ et $C(c = -1 - im)$

- 1) déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que M ; B ; C soient alignés
- 2) on suppose $|m|^2 + \operatorname{Re}(m) \neq 0$

Soit R la transformation du plan qui associer $M_1(Z_1)$ au point $M'(Z')$ tel que $Z' = iZ_1 - 1$

- a) Montrer que R est une rotation et déterminer le centre Ω et un argument de son angle
- b) Montrer que $\left(\frac{c-m}{c-b} \in i\mathbb{R} \right) \Leftrightarrow \left(|m|^2 = \operatorname{Im}(m) \right)$
- c) Dédire l'ensemble des points $M(m)$ pour que M , B , C et Ω soient cocycliques

Exercice (2) 3.5 points

On considère dans l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ l'ensemble des matrices :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -4b & a + 2b \end{pmatrix}; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et on pose } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) a) montrer que $(E, +)$ est un groupe commutatif
- b) montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension
- 2) a) vérifier que $J^2 = 2J - 4I$ et déduire que J admet un inverse que l'on déterminera
- b) montrer que E est une partie stable pour la \times dans $M_2(\mathbb{R})$
- 3) on considère l'application $f: E \rightarrow \mathbb{C}$
$$M(a, b) \rightarrow z = (a + b) + ib\sqrt{3}$$
 - a) montrer que f est un isomorphisme de (E, \times) vers (\mathbb{C}, \times)
 - b) déduire la structure de $(E, +, \times)$

Exercice (3) 4 points

Partie (1)

Soient α et β deux entiers naturels tels que $\alpha \wedge \beta = 1$

1) montrer que $(\alpha^2 + \beta^2) \wedge (\alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2) = 1$

2) soit p un nombre premier tel que $p > 3$ et $p \mid \alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2$

a) montrer que $p \wedge \alpha = 1$ et déduire que $\alpha^3 \equiv \beta^3 \pmod{p}$

b) Montrer que $p \equiv 1 \pmod{6}$

Partie(2)

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E) $x^3 - y^3 = 2014(x^2 + y^2)$ et on pose $d = x \wedge y$

1) montrer qu'il existe un couple (a, b) de \mathbb{N}^{*2} tel que $d(a^3 - b^3) = 2014(a^2 + b^2)$ et $a \wedge b = 1$

2) a) montrer que $a > b$ et $a^2 + ab + b^2 \mid 2014$

b) vérifier que $a^2 + ab + b^2 \geq 7$ puis déduire que $a^2 + ab + b^2 = 19$

3) montrer que $b^2 < 7$ et résoudre l'équation (E)

Exercice (4) 5 points

Partie(1)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x + e^{-x}$

1) étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

2) étudier le sens de variation de f

3) tracer la courbe (C_f)

Partie(2)

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_1 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1) a) montrer que $(\forall x > 0) \ln(1+x) \leq x$

b) déduire $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ln(1+n) - \ln n \leq \frac{1}{n}$

2) vérifier que $(\forall n \geq 1) f(\ln n) = \frac{1}{n} + \ln n$ et montrer par récurrence que $(\forall n \geq 1) U_n \geq \ln n$

puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3) montrer que $(\forall n \geq 2) U_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$

4) a) montrer que $(\forall k > 1) \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$



b) déduire que $(\forall n \geq 2) U_n \leq 1 + \ln(n-1)$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{\ln n}$

Exercice(5) 5points

(I) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} g(t) = e^{-\frac{1}{t^2}} & ; t \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) étudier la dérivabilité de g au point $a = 0$
- 2) montrer que $(\forall t \in \mathbb{R}) 2g(t) = t^3 g'(t)$
- 3) étudier le sens de variation de g et donner son tableau de variation puis tracer (C_g)

(II) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(t) = e^{\frac{1}{x^2}} \int_0^x g(t) dt & ; t \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) a) montrer que f est impaire
- b) montrer que $(\forall x > 0) 0 \leq \int_0^x g(t) dt \leq x e^{-\frac{1}{x^2}}$ et déduire que f est continue en 0
- 2) montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^{*+} et calculer $f'(x)$
- 3) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \int_0^x g(t) dt = \frac{1}{3} x^3 g(x) - \frac{3}{2} \int_0^x t^2 g(t) dt$
- b) déduire que f est croissante sur $]0, +\infty[$
- 4) a) montrer que $(\forall x > 1) f(x) \geq x + \frac{1}{x} - 2$ (on donne $(\forall u \in \mathbb{R}) e^u \geq u + 1$)
- b) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f