Exercice(1)

On définie sur $\mathbb{R}$ la lois interne $\perp$ par : $\left(\forall\left(a,b\right)\in\mathbb{R}^2\right)\ a\perp b=\sqrt{e^{\ln\left(1+a^2\right)\ln\left(1+b^2\right)}-1}$

1) montrer que $\perp$ est commutative ; associative dans $\mathbb{R}$

2) a) montrer que $\mathbb{R}^{*+}$ est une partie stable dans $\left(\mathbb{R},\perp\right)$

b) montrer que $\left(\mathbb{R}^{*+},\perp\right)$ est un groupe commutatif

3) soit f l'application de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ telle que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)\ \ f\left(x\right)=\ln\left(1+x^2\right)$

a) montrer que f est un isomorphisme de $\left(\mathbb{R}^+,\perp\right)$ vers $\left(\mathbb{R}^+,\times\right)$

b) déterminer $f^{-1}\left(\left[1,+\infty\right[\right)$ et déduire que $\left[\sqrt{e-1},+\infty\right[$ est stable dans $\left(\mathbb{R}^+,\perp\right)$

Exercice(2)

Soit m un paramètre complexe . on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$\left(E\right)\ \ Z^3+\left(2-i\right)Z^2+\left(m^2+1-2i\right)Z-i\left(m^2+1\right)=0$

Le plan $\left(P\right)$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

Parti(1)

1) a) vérifier que $Z_{à}=i$ est une solution de $\left(E\right)$

b) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E\right)$

2) déterminer l'ensemble des points $M\left(m\right)$ pour que deux au moins des solutions de $\left(E\right)$ aient même module

3) on pose $Z_2=-1-im$; $Z_1=-1+im$ et on suppose $m=e^{i\theta}$; $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$

Ecrire Z_1 ; Z_2 sous forme trigonométrique

Parti(2)

On considère les points M_2 ; M_1 ; M d'affixes respectivement Z_2 ; Z_1 ; m

1) déterminer l'ensemble des oints $M\left(m\right)$ pour que M_2 ; M_1 ; M soient alignés

2) on suppose $m\overline{m}+\mathrm{Re}\left(m\right)\neq 0$.

soit R l'application qui transforme $N\left(z\right)$ au point $N'\left(z'\right)$ telle que $z'=-1+iz$

a) montrer que R est une rotation en déterminant le centre Ω et l'angle ϕ

b) montrer que $\dfrac{Z_2-m}{Z_2-Z_1}$ est imaginaire si et seulement si $m\overline{m}-\mathrm{Im}\left(m\right)=0$

c) déduire l'ensemble des points $M\left(m\right)$ tel que M_2 ; M_1 ; M et Ω cocyclique

Exercice(3)

On considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation $\left(E\right)$: $2^x-3^y=1$ et soit $\left(x,y\right)$ un élément de $\mathbb{N}^{*2}$ solution de $\left(E\right)$

1) soit m un entier naturel tel que $2^m\equiv 1\ \left[9\right]$.

montrer que $m > 3$ et déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant $2^n \equiv 1 \ [9]$

2) a) montrer que si $y > 1$ alors $2^x \equiv 1 \ [9]$ puis déduire que $6 \mid x$

b) montrer que $2^x \equiv 1 \ [63]$

3) déterminer l'ensemble des solution de (E)

Exercice (4)

Soit n un entier naturel non nul .

On considère la fonction P_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $p_n(x) = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^k x^k}{k}$

(A) 1) montrer que $(\forall x \geq 0) \quad P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$

2) étudier les variations de P_n et dresser le tableau de variation

3) montrer que $P_n(1) < 0$

4) a) vérifier que $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n=1}\right)$

b) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad P_n(2) \geq 0$

5) montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet dans $[1,+\infty[$ une solution x_n et $1 < x_n \leq 2$

$(\mathbf{B})$ 1) montrer que $(\forall x \geq 0) \quad P_n(x) = \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt$

2) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1} dt$

3) montrer que $(\forall t \geq 1) \quad t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$

4) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$

b) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln 2}{n}}$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} x_n$

Exercice (5)

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$

1) a) étudier la dérivabilité de f à droite de $a = 0$

b) étudier la branche infinie de la courbe (C_f)

2) a) calculer la dérivée $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f

b) montrer que $(\forall x > 0) \quad f''(x) = \frac{e^x(e^x - 2)}{4\sqrt{(e^x-1)^3}}$ et étudier la concavité de (C_f)

3) tracer la courbe $\left(C_f\right)$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

4) soit G la fonction définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $G\left(x\right) = \displaystyle\int_{0}^{\ln\left(1+\tan^2 x\right)} f\left(t\right)dt$

a) étudier le sens de variation de $g\left(x\right) = \ln\left(1+\tan^2 x\right)$ sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

b) montrer que G est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $G'\left(x\right) = 2\tan^2 x$

c) déduire une expression de $G\left(x\right)$

5) calculer l'air du domaine limite par la courbe $\left(C_f\right)$ et les droites $x = \ln 2$; $x = 0$; $y = 0$