2017–2016	اقتراح	الثانية علوم رياضية

Exercice 1 (2.5 pts)

On pose $I = \left]-1,1\right[$, on définie sur I la lois $*$ telle que $\left(\forall (a,b)\in I^2\right)\quad a*b = \dfrac{a+b}{1+ab}$

1) Montrer que $*$ est commutative , associative dans I — 0,75 ن
2) Montrer que $(I,*)$ est un groupe commutatif — 0,5 ن
3) On considère l'ensemble $E = \left\{ P_a = \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \;/\; a\in I \right\}$

a) Montrer que $\left(\forall (a,b)\in I^2\right)\quad P_a \times P_b = P_{a*b}$ — 0,5 ن

b) En déduire que $(E,\times)$ est un groupe commutatif et déterminer P_a^{-1} — 0.75 ن

Exercice 2 (3 pts)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\quad Z^2 - \left(\sqrt{3}+3i\right)Z + 2\left(-1+i\sqrt{3}\right) = 0$ — 0,5 ن

1) vérifier que le discriminant de (E) s'écrit $\Delta = \left(\sqrt{3}-i\right)^2$ puis résoudre (E)

2) le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

on pose $b = 2i$; $a = \sqrt{3}+i$ et on considère les points $B(b)$; $A(a)$.

R_1 est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; R_2 la rotation de centre B — 0,5 ن

et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On considère l'application $f = R_2 \circ R_1$

a) montrer que $f(B) = A$ — 0,5 ن

b) soit $M(m)$ un point du plan (P) . on pose $N = R_1(M)$ et $M' = f(M)$ — 0.75 ن

(i) déterminer en fonction de m le nombre n affixe de N — 0,5 ن

(ii) montrer que l'affixe de M' est $m' = -m + 3i + \sqrt{3}$ en déduire la nature de f — 0,25 ن

c) vérifier que $\dfrac{m'-m}{n-m} = 1 + i\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}-3i}{m}$ — 0,5 ن

déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que M' , N et M soient alignés

exercice 3 (3.25 pts)

1) montrer que $19^5 \equiv 15\quad [26]$ — 0,75 ن

2) soit x un entier relatif — 0,5 ن

Montrer que $x^{13} - x$ est divisible par 2 en déduire que $x^{13} \equiv x\quad [26]$ — 0,5 ن

3) montrer que si $x^5 \equiv y\quad [26]$ alors $y^5 \equiv x\quad [26]$

4) résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^5 - 26y = 19$

Exercice 4 (5.5 pts)

Soit n un entier naturel .

on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{x^2}$ — 0,5 ن

soit (C_n) la courbe de f_n dans un repère orthonormé

1) a) calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$ manti.1s.fr

b) étudier les branches infinies de la courbe $\left(C_n\right)$ — 0,25 ن

2) a) montrer que f_n est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et $\left]-\infty,0\right[$ puis calculer $f'\left(x\right)$ — 0,5 ن

b) dresser le tableau de variations de f_n — 0,5 ن

3) a) montrer que l'équation $f_n\left(x\right)=1$ admet dans $\left]-\infty,0\right[$ une seule solution x_n — 0,5 ن

b) montrer que $\left(\forall n \in\geq 2\right)\quad -1 < x_n < -\dfrac{1}{n}$ — 0,5 ن

4) a) montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\quad f_{n+1}\left(x_n\right)=e^{x_n}$ en déduire que $\left(x_n\right)_n$ est convergente — 0.75 ن

b) prouver que $\left(\forall n \geq 2\right)\quad x_n \geq -\dfrac{2\ln n}{n}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,x_n$ — 1 ن

5) tracer la courbe $\left(C_1\right)$ — 0,5 ن

Exercice 5 (5.75 pts)

Partie (1)

Soit la fonction f définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\quad ;\quad x>0$ et $f\left(0\right)=0$

1) montrer que f م est continue à droite de $x_0=0$ — 0,5 ن

2) étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0=0$ — 0,5 ن

3) calculer $f'\left(x\right)$ et étudier le sens de variations de f puis dresser le tableau de variations — 0,5 ن

4) tracer la courbe $\left(C_f\right)$ — 0,5 ن

Partie (2) on considère la fonction F définie sur $\left]1,+\infty\right[$ par : $F\left(x\right)=\displaystyle\int_1^{\frac{1}{\ln x}} f\left(t\right)dt$

1) montrer que F est dérivable sur $\left]1,+\infty\right[$ et calculer $F'\left(x\right)$ — 0.75 ن

2) calculer $F\left(e\right)$ en déduire le signe de $F\left(x\right)$ — 0,5 ن

3) a) prouver que $\left(\forall x>1\right)\quad F\left(x\right)=\displaystyle\int_x^e \frac{1}{t^2\ln t}dt$ — 0,5 ن

b) montrer que $\left(\forall t>1\right)\quad \ln t \leq t-1$ en déduire $\left(\forall x \in \left]1,e\right[\right)\quad F\left(x\right)\geq \displaystyle\int_x^e \frac{1}{e^2\left(t-1\right)}dt$ — 0,75 ن

c) calculer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} F\left(x\right)$ — 0,5 ن

4) a) vérifier que $\left(\forall x>e\right)\quad \dfrac{1}{t^2\ln t}\leq \dfrac{1}{t^2}$ — 0,25 ن

b) soit l la limite de F en $+\infty$, montrer que $-\dfrac{1}{e}<l<0$ et donner le tableau de F — 0,5 ن