| 2éme SM | | 2017-2016 |
|---|---|---|

## Exercice(1) structure

$I)$ on considère dans l'anneau unitaire $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A^2$ et montrer que $A^2=4A-3I$ ( on rappel que $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$ est un espace vectoriel )

2) Déduire que $A$ admet dans un inverse que l'on déterminera

$II)$ on définie sur $\mathbb{R}$ la lois interne $T$ définie par : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad xTy=x+y-2016$

1) a) montrer que $T$ est commutative , associative dans $\mathbb{R}$

b) montrer que $(\mathbb{R},T)$ est un groupe commutatif

2) soit $\perp$ la lois définie sur $\mathbb{R}$ par $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad x\perp y=x+y-\dfrac{1}{2016}xy$

et on considère l'application $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2016(1-x)$

a) montrer que $f$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},\times)$ vers $(\mathbb{R},\perp)$

b) déduire que $(\mathbb{R},T,\perp)$ est un corps commutatif

## Exercice(2) complexe

1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\ 2Z^2-1+i\sqrt{3}=0$ ( on note $a$ la solution telle que $\operatorname{Re}(a)>0$

2) a) déterminer le module et un argument du nombre $1+a$

b) vérifier que $(1-a)(1+a)=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ puis déduire la forme trigonométrique du nombre $1-a$

3) Le plan complexe $(P)$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ .

On considère les points $A$ , $B$ , $M$ , $M'$ , $N$ d'affixes respectivement $a$ , $-a$ , $z$ , $z'$ , $\bar{z}$

et on suppose que $2zz'-1+i\sqrt{3}=0$ et $|z|=1$

a) montrer que $\overline{\left(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{ON}\right)}\equiv\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $z'-a=\left(-1+i\sqrt{3}\right)\dfrac{z-a}{2az}$

b) montrer que si $(z+a)(z'+a)\neq 0$ alors $\dfrac{z'-a}{z'+a}=-\dfrac{z-a}{z+a}$

c) on suppose $A$ , $B$ , $M$ non alignés montrer que $A$ , $B$ , $M$ , $M'$ sont cocycliques

## Exercice(3) arithmétique

$(I)$ 1) résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $(E)\ \ 7x-6y=1$

2) on pose $N=\overline{\underbrace{11....1}_{2016\,fois}}^{(7)}$

a) montrer que $\left(7^{2015},N\right)$ est une solution de $(E)$

b) déduire que $2017 \mid N$ ( on donne $2017$ est un nombre premier )

$(II)$ On considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation $(F)$ $7^n - 3\times 2^m = 1$

1) on suppose $m \geq 5$ . soit $(n;m)$ ne solution de $(F)$

a) montrer $7^n \equiv 1 \; [32]$

b) déterminer suivant $p$ le reste de la division euclidienne du nombre $7^p$ par $32$

c) déduire que $7^n \equiv 1 \; [5]$

2) déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $(F)$

## Exercice(4) fonction

Soit $p$ un entier naturel non nul . on considère la fonction $f_p$ telle que $f_p(x) = 1 + \ln(x+p)$

et on pose $h_p(x) = x - f_p(x)$

Parti(1)

1) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} f_1(x)$

2) étudier la branche infinie de la courbe $(C_{f_1})$ au voisinage de $+\infty$

3) étudier le sens de variation de la fonction $f_1$ et donner le tableau de variation de $f_1$

4) donner l'équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(C_{f_1})$ au point $a=1$ puis tracer $(C_{f_1})$ et $(T)$

Parti(2)

1) montrer que l'équation $f_p(x) = x$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution $\alpha_p$

2) déterminer le signe de $h_{p+1}(\alpha_p)$ et déduire que la suite $(\alpha_p)_p$ est croissante

3) montrer que $\alpha_p \geq 1 + \ln p$ et déduire $\lim\limits_{p\to+\infty} \alpha_p$

Parti(3)

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f_1(U_n)$

1) montrer que $1 < \alpha_1 < 3$

2) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $1 \leq U_n < 3$

b) en utilisant le théorème des accroissements finis montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $|U_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha_1|$

c) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $|U_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

| 2éme SM | | 2017-2016 |
|---|---|---|

## Exercice(5) integral

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\left[-1,+\infty\right[$ par $f\left(-1\right)=e^{-1}\ln 2$ et $f\left(x\right)=\int_{x}^{2x+1}\frac{e^{t}}{t+1}dt$ ; $x>-1$

1) montrer que $\left(\forall x>-1\right)$ $\int_{x}^{2x+1}\frac{1}{t+1}dt=\ln 2$

2) a) montrer que $\left(\forall x>-1\right)$ $e^{x}\ln 2\leq f\left(x\right)\leq e^{2x+1}\ln 2$

b) déduire que $f$ est continue à droite de $a=-1$

3) calculer les limites $\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}$ puis donner une interprétation du résultat

4) a) montrer que $f$ est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et on a $\left(\forall x>-1\right)$ $f'\left(x\right)=\frac{e^{x}\left(e^{x+1}-1\right)}{x+1}$

b) étudier le sens de variation de $f$ et dresser le tableau de variation de $f$

5) a) montrer que $\left(\forall x>-1\right)$ $e^{-1}\leq\frac{f\left(x\right)-f\left(-1\right)}{x+1}\leq e^{2x+1}$

( utiliser deux fois le théorème des accroissements finis )

b) déduire que $f$ est dérivable à droite de $a=-1$ en déterminant le nombre $f_{d}^{'}\left(-1\right)$

6) tracer la courbe $\left(C_{f}\right)$