

Rolle et accroissements finis

Exe 1

peut-on appliquer le théorème de Rolle à f sur l'intervalle I :

1) $f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 3}$ $\text{sur } I = [-2, 2]$

2) $f(x) = x - E(x)$ $\text{sur } I = [1, 2]$

3) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ $\text{sur } I = [0, 1]$

4) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\text{sur } I = [-1, 1]$

Exe 2

En utilisant le théorème des accroissements finis montrer :

1) $\left(\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right) \quad \sin x < x < \tan x$

2) $\left(\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right) \quad 1 - \cos x < x^2$

Exe 3

soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ ($a < b$)
montrer que :

$$\left(\exists c \in \left] a, b \right[\right) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3} = \frac{f'(c)}{3c^2}$$

Exe 4

en utilisant le théorème des accroissements finis calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\arctan x - \arctan \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{x+3} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x-2}} \times \sqrt[15]{x^2}$

Exe 5

1) montrer que :

$$\left(\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right) \quad x \cos x - \sin x < 0$$

2) étudier le sens de variation de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{sur } \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

3) en déduire que :

$$\left(\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right) \quad \frac{2x}{\pi} < \sin x < x$$

Exe 6

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3-x^2}{2} & ; \quad x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

1) montrer que :

$$\left(\exists \alpha \in \mathbb{R} \right) \quad f(2) - f(0) = 2f'(\alpha)$$

2) quelles sont les valeurs de α

Exe 7

1) montrer que :

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right) \quad \sin x \geq x \cos x$$

2) on pose $g(x) = x \sin x + 2 \cos x - 2$

a) étudier les variations de g sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

b) déduire le signe de $g(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

3) soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ par :

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} ; \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = \frac{1}{2}$$

a) montrer que :

$$\left(\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

b) déduire que f est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

4) soit x de $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$

a) montrer que

$$\left(\exists \alpha \in \left] 0, x \right[\right) \quad \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1 - \cos \alpha}{3\alpha^2}$$

b) en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$