TD : THEOREME DE ROLLE ; THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS (T.A.F)

Exercice 1 : Soit f la fonction définie par :
$f(x)=3x^4-11x^3+12x^2-4x+2$ Montrer que f' s'annule au moins une fois sur]0, 1[

Exercice 2 : Soit $f: R \to R$ la fonction définie par :
$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{1+\cos^2 x}$,
Montrer que, pour tout $a \in R$, la fonctions f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle] a, $a+2\pi$[.

Exercice 3 : Soit f une fonction définie par :
$f(x)=\frac{1-\cos(2\pi x)}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$
Montrer :($\exists c \in$]-1,1[) ($f'(c)=0$

Exercice 4 : Soit f la fonction définie par :
$f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$ Montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet trois solutions sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 : Considérons une fonction f continue sur [0,1] et dérivable sur]0,1[telle que :
$f(0)-f(1)=-1$.
Montrer en utilisant le théorème de Rolle
($\exists c \in$]0,1[) ($\frac{f'(c)}{c}=\frac{4}{(c^2+1)^2}$

Exercice 6 : Détermination d'une limite.
Considérons les deux fonctions :
$u(t)=Arctan(t)-t$ et $v(t)=t^2$ et soit $x \in \mathbb{R}*$
1) Montrer qu'il existe c compris entre 0 et x tel que : $\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u'(c)}{v'(c)}$
2) En déduire la limite : $\lim_{x\to 0}\frac{ar\tan x-x}{x^2}$

Exercice 7 : En utilisant le I.A.F
Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(|\sin x| \leq |x|$

Exercice 8 : En utilisant le I.A.F
Montrer que $\forall a\in\mathbb{R}$ et $\forall b\in\mathbb{R}$ et $0\leq a\leq b$
$$\frac{b-a}{1+b^2}\leq ar\tan b-ar\tan a\leq\frac{b-a}{1+a^2}$$

Exercice 9 : En utilisant le Théorème des accroissements finies(T.A.F) donner un encadrement du nombre $\sqrt{10001}$ et en déduire une valeur approchée de $\sqrt{10001}$ avec la précision 5×10^{-5}.

Exercice 10 : soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :
$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$
1)Calculer u_1 ; u_2 et u_3
2)a) monter que $\forall x\in\mathbb{R}_*^+$: $\frac{1}{x+1}\leq \ln(x+1)-\ln x\leq\frac{1}{x}$
b) en déduire que : $u_{n+1}-1\leq\ln(n+1)\leq u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$
c)calculer : $\lim_{n\to+\infty}u_n$

Exercice 11 : Soit f une fonction définie sur l' intervalle $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ par :
$f(x)=\frac{\pi}{2}-\sin x$ et la suite (u_n) définie par :
$u_{n+1}=f(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ et $u_0\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

1)montrer que l'équation : $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

2)montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{\pi}{6}\prec u_n\prec\frac{\pi}{2}$

3)a)montrer que : $\forall x\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ $\left|f'(x)\right|\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

b)en déduire que : $\left|u_{n+1}-\alpha\right|\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left|u_n-\alpha\right|$ $\forall n\in\mathbb{N}$

4) calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Exercice 12 : Soit f une fonction dérivable trois fois sur $[0;1]$ tel que : $f(1)=1$ et

$f(0)=f'(0)=f'(1)=0$

Et soit le polynôme : $P(x)=x^2(-2x+3)$

1)calculer : $P(0)$; $P'(0)$; $P(1)$; $P'(1)$

2)on pose : $g(x)=f(x)-P(x)$

a) montrer qu'il existe $\alpha\in]0;1[$ tel que : $g^{(3)}(\alpha)=0$

b) en déduire qu'il existe $\alpha\in]0;1[$ tel que :

$f^{(3)}(\alpha)=-12$

Exercice13 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=x\arctan\left(\sqrt[3]{x^2+\frac{1}{x^2}}\right)$

et $\forall x\in\mathbb{R}^*$ on pose : $F(x)=\frac{f(x)}{x}$

1)vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}^*$ $F\left(\frac{1}{x}\right)=F(x)$

2)montrer que :

$\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right)\left(\exists y\in\mathbb{R}^*\right)/\left(y-x\right)\left(y-\frac{1}{x}\right)\le 0$ et $F'(y)=0$

3) en application le théorème de Rolle a F sur un intervalle montrer qu'il existe un réel c non nul tel que la tangente a la courbe de f au point d'abscisse c passe par l'origine du repère

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien